ESERCIZIO 1

PREMESSA
La relazione che lega il costo totale conoscendo quello unitario e il numero di oggetti acquistati può essere rappresentata col termine regola(<sigla>,[costo unitario, quantità], <costo totale>). Più in generale, con il termine

reg(<Sigla>,<Lista antecedenti>,<Conseguente>,<Peso>)

si può descrivere ogni regola di deduzione che consente di dedurre <Conseguente> conoscendo tutti gli elementi contenuti nella <Lista antecedenti>; ogni regola è identificata in modo univoco da <Sigla>; il <Peso> misura la difficoltà di applicazione di quella regola (per esempio, basso per una somma, più alto per una divisione). Un procedimento di deduzione o di calcolo è rappresentato da un elenco di regole da applicare e quindi può essere descritto dalla lista delle sigle ad esse corrispondenti.
Se, ad esempio, è assegnato il seguente insieme di regole

reg(11,[a,g],z) reg(12,[m,f,g],w) reg(13,[a,b,w],q).
reg(14,[r,g],b) reg(15,[a,b],s) reg(20,[a,z],w).

conoscendo [**a**,**g**], è possibile dedurre **z** con la regola 11; ma è anche possibile dedurre **w** applicando prima la regola 11 (per dedurre **z**) e poi la regola 20 per dedurre **w**; quindi, la lista di sigle [11,20] descrive il procedimento per dedurre **w** conoscendo [**a**,**g**].
Ad ogni procedimento può essere associato un peso complessivo dato dalla somma dei pesi delle singole regole che lo compongono.

PROBLEMA
È dato il seguente insieme di regole:

reg(1,[a,b],n,5) reg(2,[u],m,3) reg(3,[g,t],a,1)
reg(4,[v,w],b,6) reg(5,[u,v],w,8) reg(6,[e,c],n,9)
reg(7,[p,q],n,4) reg(8,[g],e,2) reg(9,[g,u],p,3)
reg(10,[u,v],q,7) reg(11,[v,w],c,6) reg(12,[u],g,6)
reg(13,[p,r],h,11) reg(14,[t,x],i,9) reg(15,[v],t,9)

A partire da [**u**,**v**] trovare:
- la lista L1 relativa al procedimento per derivare **n** con l'applicazione di 4 regole;
- la lista L2 relativa al procedimento per derivare **n** con l'applicazione di 5 regole;
- la lista L3 relativa al procedimento per derivare **n** con l'applicazione di 6 regole.

Elencare le sigle nell'ordine che corrisponde alla sequenza di applicazione delle regole: il primo elemento della lista deve essere la sigla che corrisponde alla prima regola da applicare. In casi di alternativa (cioè ci siano più regole applicabili) dare la precedenza alla regola con sigla inferiore.

L1	
L2	
L3	

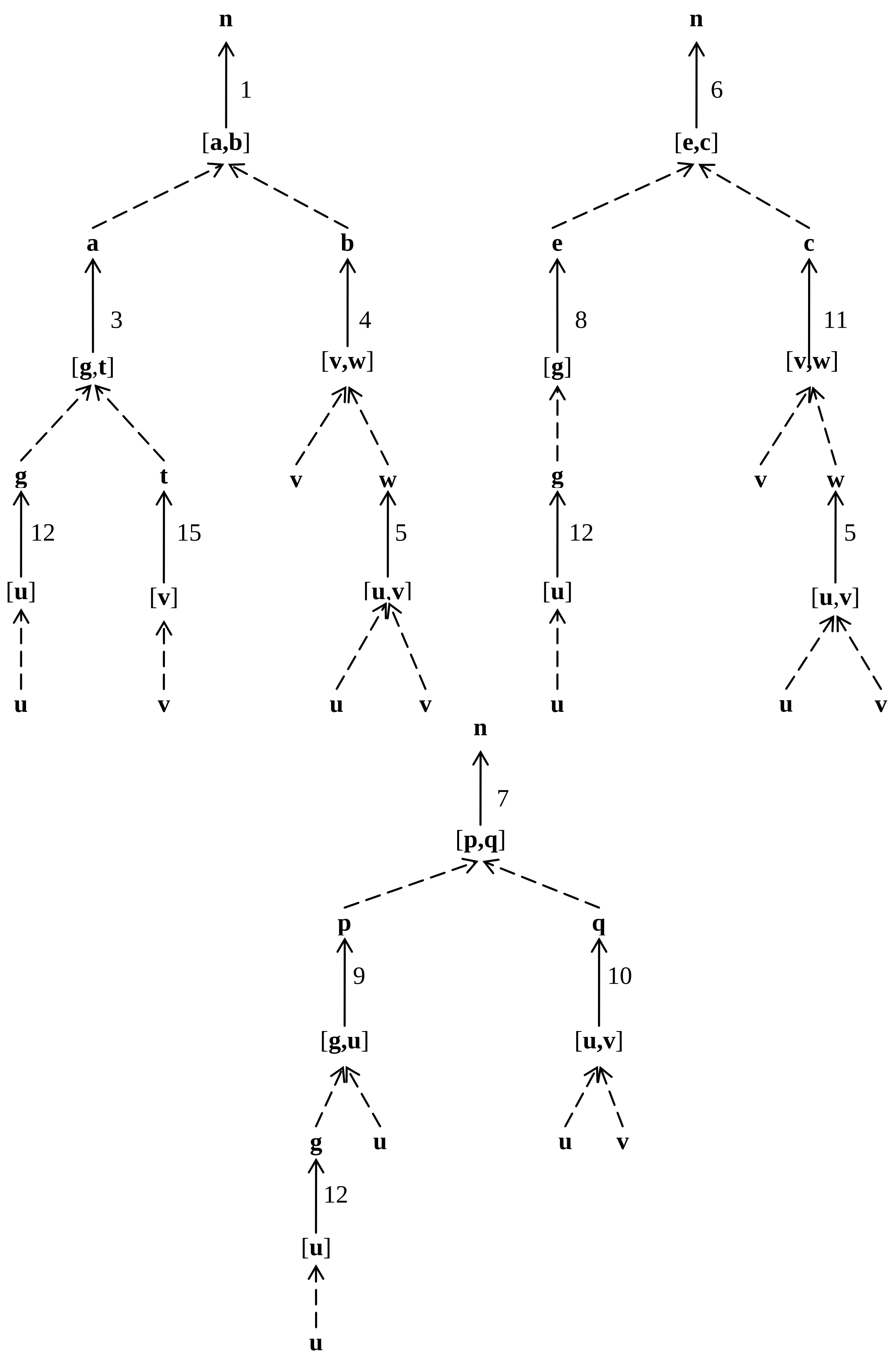
SOLUZIONE

L1	[10,12,9,7]
L2	[5,11,12,8,6]
L3	[5,4,12,15,3,1]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
Si ricorda che, in generale, per risolvere il problema si può usare il metodo *backward* (o *top down*) che consiste nel partire dalla incognita e cercare di individuare una regola per derivarla. Se esiste

una regola le cui premesse sono tutte note (i dati) la soluzione è trovata, altrimenti si deve continuare a cercare regole per derivare i tutti termini incogniti; il metodo è illustrato nella *prima* figura seguente, in cui le frecce non tratteggiate (di tipo OR) indicano le regole (la sigla è scritta a fianco) e le frecce tratteggiate (di tipo AND) indicano gli antecedenti della regola. In questo modo si trovano procedimenti per derivare l'incognita rappresentati graficamente da alberi, le cui foglie sono (tutte) dati.
I tre alberi, mostrati in figura, descrivono i processi di derivazione richiesti da questo problema.
Un altro metodo è quello *forward* (o *bottom up*) che consiste nel partire dai dati e usare le regole applicabili per aumentare la conoscenza via via fino a comprendere l'incognita; il metodo è illustrato nella seconda figura seguente che mostra i tre alberi relativi al problema.
N.B. Nel primo caso la successione delle regole applicate è dal basso verso l'alto; nel secondo caso è dall'alto al basso.

***backward* (o *top down*)**



***forward* (o *bottom up*)**

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbf{u,v}]} \arrow[d, "5"] & {[\mathbf{u,v}]} \arrow[d, "5"] & {[\mathbf{u,v}]} \arrow[d, "10"] \\
{[\mathbf{u,v,w}]} \arrow[d, "4"] & {[\mathbf{u,v,w}]} \arrow[d, "11"] & {[\mathbf{u,v,q}]} \arrow[d, "12"] \\
{[\mathbf{u,v,w,b}]} \arrow[d, "12"] & {[\mathbf{u,v,w,c}]} \arrow[d, "12"] & {[\mathbf{u,v,q,g}]} \arrow[d, "9"] \\
{[\mathbf{u,v,w,b,g}]} \arrow[d, "15"] & {[\mathbf{u,v,w,c,g}]} \arrow[d, "8"] & {[\mathbf{u,v,q,g,p}]} \arrow[d, "7"] \\
{[\mathbf{u,v,w,b,g,t}]} \arrow[d, "3"] & {[\mathbf{u,v,w,c,g,e}]} \arrow[d, "6"] & {[\mathbf{u,v,q,g,p,n}]} \\
{[\mathbf{u,v,w,b,g,t,a}]} \arrow[d, "1"] & {[\mathbf{u,v,w,c,g,e,n}]} & \\
{[\mathbf{u,v,w,b,g,t,a,n}]} & &
\end{tikzcd}$$

ESERCIZIO 2

PREMESSA

In un foglio a quadretti è disegnato un campo di gara, per esempio di 14 quadretti in orizzontale e 5 in verticale (vedi figura).

									S				
					P								
➔													

Ogni casella può essere individuata da due numeri (interi); per esempio la casella contenente P è individuata da essere nella sesta colonna (da sinistra) e nella terza riga (dal basso): brevemente si dice che ha *coordinate* [6,3]; la prima coordinata (in questo caso 6) si dice *ascissa* e la seconda (in questo caso 3) si dice *ordinata*. Le coordinate della casella contenente S sono [10,4] e di quella contenente la freccia sono [1,1].

La freccia può essere pensata come un robot, in questo caso rivolto verso destra; il robot può eseguire tre tipi di comandi:

- girarsi di 90 gradi in senso *orario*: comando o;
- girarsi di 90 gradi in senso *antiorario*: comando a;
- avanzare di una casella (nel senso della freccia, mantenendo l'orientamento): comando f.

Questi comandi possono essere concatenati in sequenze in modo da permettere al robot di compiere vari percorsi; per esempio la sequenza di comandi descritta dalla lista [f,f,f,f,f,a,f,f] fa spostare il robot dalla posizione e orientamento iniziali mostrati in figura fino alla casella P; risultato analogo si ottiene con la lista [a,f,f,o,f,f,f,f,f]. Tuttavia, nel primo caso l'orientamento finale del robot è verso l'alto, mentre nel secondo caso l'orientamento finale è verso destra.

Le rotazioni oraria e antioraria sono *istantanee*, mentre *l'avanzamento (comando f) richiede un giorno*. I due percorsi sono diversi, ma vengono entrambi eseguiti in sette giorni (perché ciascuno è il risultato di 7 comandi f).

Il robot ha sempre uno dei quattro orientamenti seguenti descritti con: n (nord, verso l'alto), s (sud, verso il basso), e (est, verso destra), o (ovest, verso sinistra).

N.B. Non confondere "o" come descrizione dell'orientamento e "o" come comando.

PROBLEMA

In un campo di gara, sufficientemente ampio, si trovano due robot (A e B) che, partendo *contemporaneamente* devono compiere due percorsi così definiti:

robot A: coordinate della partenza [1,1], direzione **n**, lista dei comandi:

[f,f,o,f,f,a,f,f,f,a,f,a,f,f,a,f,f,f,a,f,f];

robot B: coordinate della partenza [1,1], direzione **e**, lista dei comandi:

[f,f,f,a,f,o,f,f,f,f,a,f,f,a,f,f,f,o,f,f,a,f,f,f].

Determinare

- la lista L1 delle caselle che appartengono a entrambi i percorsi;
- la lista L2 delle caselle che i due robot occupano *contemporaneamente*.

N.B. quanto segue:

1. una casella si indica con la lista delle sue due coordinate: per esempio [3,4] oppure [11,7];
2. L1 o L2 può essere la lista vuota ([]);
3. L1 o L2 può essere la lista di un solo elemento (per esempio [[4,5]]) o la lista di due elementi (per esempio [[3,4],[9,6]]) o la lista di più elementi;

4. se L1 o L2 ha due o più elementi questi devono comparire in ordine crescente di ascissa; a parità di ascissa, in ordine crescente di ordinata.

L1	
L2	

SOLUZIONE

L1	[[1,1],[2,6],[3,6],[5,4],[5,5],[5,6]]
L2	[[1,1],[5,4],[5,5],[5,6]]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

PERCORSO DEL PRIMO ROBOT

Giorno	**stato iniziale**	**comando**	**stato finale**
0		**partenza**	[1,1,n]
1	[1,1,n]	f	[1,2,n]
2	[1,2,n]	f	[1,3,n]
2	[1,3,n]	o	[1,3,e]
3	[1,3,e]	f	[2,3,e]
4	[2,3,e]	f	[3,3,e]
4	[3,3,e]	a	[3,3,n]
5	[3,3,n]	f	[3,4,n]
6	[3,4,n]	f	[3,5,n]
7	[3,5,n]	f	[3,6,n]
7	[3,6,n]	a	[3,6,o]
8	[3,6,o]	f	[2,6,o]
8	[2,6,o]	a	[2,6,s]
9	[2,6,s]	f	[2,5,s]
10	[2,5,s]	f	[2,4,s]
10	[2,4,s]	a	[2,4,e]
11	[2,4,e]	f	[3,4,e]
12	[3,4,e]	f	[4,4,e]
13	[4,4,e]	f	[5,4,e]
13	[5,4,e]	a	[5,4,n]
14	[5,4,n]	f	[5,5,n]
15	[5,5,n]	f	[5,6,n]

PERCORSO DEL SECONDO ROBOT

Giorno	**stato iniziale**	**comando**	**stato finale**
0		**partenza**	[1,1,e]
1	[1,1,e]	f	[2,1,e]
2	[2,1,e]	f	[3,1,e]
3	[3,1,e]	f	[4,1,e]
3	[4,1,e]	a	[4,1,n]
4	[4,1,n]	f	[4,2,n]
4	[4,2,n]	o	[4,2,e]
5	[4,2,e]	f	[5,2,e]
6	[5,2,e]	f	[6,2,e]

7	[6,2,e]	f	[7,2,e]
8	[7,2,e]	f	[8,2,e]
8	[8,2,e]	a	[8,2,n]
9	[8,2,n]	f	[8,3,n]
10	[8,3,n]	f	[8,4,n]
10	[8,4,n]	a	[8,4,o]
11	[8,4,o]	f	[7,4,o]
12	[7,4,o]	f	[6,4,o]
13	[6,4,o]	f	[5,4,o]
13	[5,4,o]	o	[5,4,n]
14	[5,4,n]	f	[5,5,n]
15	[5,5,n]	f	[5,6,n]
15	[5,6,n]	a	[5,6,o]
16	[5,6,o]	f	[4,6,o]
17	[4,6,o]	f	[3,6,o]
18	[3,6,o]	f	[2,6,o]

Caselle del percorso del primo robot
[1,1], [1,2], [1,3], [2,3], [3,3], [3,4], [3,5], [3,6], [2,6], [2,5], [2,4], [3,4], [4,4], [5,4], [5,5], [5,6]

Caselle del percorso del secondo robot
[1,1], [2,1], [3,1], [4,1], [4,2], [5,2], [6,2], [7,2], [8,2], [8,3], [8,4], [7,4], [6,4], [5,4], [5,5], [5,6], [4,6], [3,6], [2,6]

6 CASELLE IN COMUNE (da ordinare)	PRIMO ROBOT GIORNO	SECONDO ROBOT GIORNO
[1,1]	0	0
[3,6]	7	17
[2,6]	8	18
[5,4]	13	13
[5,5]	14	14
[5,6]	15	15

ESERCIZIO 3

PROBLEMA

Nel seguente testo sostituire a X1, X2, ecc. la parola più appropriata, scelta tra quelle proposte. (N.B. Solo una scelta è *coerente* col significato generale del testo, anche se altre sono sintatticamente possibili; per svolgere l'esercizio non è necessario conoscere l'argomento trattato nel brano.)

I *Principia* contengono, naturalmente, molte altre cose oltre al calcolo infinitesimale, alle leggi del X1 e alla gravitazione X2. Vi si trovano, tra l'altro, cose come lo studio del X1 dei corpi in mezzi resistenti e la dimostrazione che, per vibrazioni isotermiche, la velocità del suono dovrebbe essere uguale a quella di un corpo che cada a X3, senza incontrare resistenza, da un'altezza che è la metà di quella di un'atmosfera uniforme che abbia come densità quella dell'aria alla superficie della X3 ed eserciti la medesima pressione. Dai suoi calcoli teorici Newton deduceva che la velocità del suono avrebbe dovuto essere di circa 979 X4 al secondo, mentre in base ai dati raccolti sperimentalmente sapeva che tale velocità di fatto era molto vicina a 1142 X4 al secondo. Questa contraddizione non fu risolta nei *Principia*, ma si dovette attendere quasi un X5 finché Laplace spiegò che la differenza era dovuta al fatto che le vibrazioni del X6 vanno considerate come adiabatiche. Un altro fra i risultati scientifici contenuti nei Principia è una dimostrazione matematica della non validità della concezione allora prevalente, la teoria cartesiana dei "vortici": alla fine del Libro II Newton dimostrò che, in base alle leggi della X7, pianeti in moto vorticoso si muoverebbero più velocemente all'afelio che al perielio, e ciò sarebbe in contraddizione con le leggi astronomiche di Keplero. Tuttavia passarono circa quarant'anni prima che la X8 gravitazionale dell'universo elaborata da Newton, e divulgata da Maupertuis e da Voltaire, scalzasse in Francia la cosmologia cartesiana dei "vortici".

Lista delle scelte:

A millennio	N terrestre
B generale	O meccanica
C statica	P centimetri
D metri	Q lustro
E secolo	R solare
F universale	S sfera
G concezione	T moto
H piedi	U lunare
I mutamento	V terra
J circadiana	W suono
L costruzione	X siderea
K chilometri	Y piombo
M corpo	Z yard

Indicare le scelte con la lettera maiuscola corrispondente.

X1	
X2	
X3	
X4	

X5	
X6	
X7	
X8	

SOLUZIONE

X1	T
X2	F
X3	V
X4	H
X5	E
X6	W
X7	O
X8	G

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Variabile	**Presumibili proprietà grammaticali o sintattiche**	**Scelte possibili**	**Scelta corretta**
X1	sost. maschile singolare	millennio, secolo, mutamento, corpo, lustro, moto, suono, piombo	moto
X2	agg. femminile singolare	generale, universale, circadiana, terrestre, solare, lunare, siderea	universale
X3	sost. femminile singolare	statica, concezione, costruzione, meccanica, sfera, terra,	terra
X4	sost. plurale	metri, piedi, yard, chilometri, centimetri	piedi
X5	sost. maschile singolare	millennio, secolo, mutamento, corpo, lustro, moto, suono, piombo	secolo
X6	sost. maschile singolare	millennio, secolo, mutamento, corpo, lustro, moto, suono, piombo	suono
X7	sost. femminile singolare	statica, concezione, costruzione, meccanica, sfera, terra,	meccanica
X8	sost. femminile singolare	statica, concezione, costruzione, meccanica, sfera, terra,	concezione

ESERCIZIO 4

PREMESSA

In un foglio a quadretti è disegnato un campo di gara di dimensioni 14 × 5 (14 quadretti in orizzontale e 5 in verticale, vedi figura).

		Q											
		5	■	■		■			S				
			7	P									
		1											
🯅													

Ogni casella può essere individuata da due numeri (interi); per esempio la casella contenente P è individuata da essere nella quinta colonna (da sinistra) e nella terza riga (dal basso): brevemente si dice che ha *coordinate* [5,3]; la prima coordinata (in questo caso 5) si dice *ascissa* e la seconda (in questo caso 3) si dice *ordinata*. Le coordinate della casella contenente S sono [10,4] e di quella contenente il robot 🯅 sono [1,1].
Il robot si muove a passi e ad ogni passo (o mossa) può spostarsi solo in una delle caselle contenenti ♘ come illustrato nella seguente figura (allo stesso modo del *cavallo* nel gioco degli scacchi).

	♘		♘	
♘				♘
		🯅		
♘				♘
	♘		♘	

Ciascuna mossa del cavallo può essere individuata dalle rispettive direzioni come indicate nella rosa dei venti (nord-nord-est, est-nord-est, est-sud-est, sud-sud-est, sud-sud-ovest, ovest-sud-ovest, ovest-nord-ovest, nord-nord-ovest) e riprodotte nel seguente schema

	nno		nne	
ono				ene
		🯅		
oso				ese
	sso		sse	

Il campo di gara contiene caselle interdette al robot (segnate da un quadrato nero) quindi, tenuto conto anche dei bordi del campo di gara, la mobilità del robot può essere limitata; ad esempio se il robot si trovasse nella casella in cui c'è Q si potrebbe spostare solo in 3 caselle; se fosse nella casella in cui c'è P avrebbe 7 mosse possibili; dalla casella [1,1] ha solo 2 mosse possibili. In alcune caselle sono posti dei premi che il robot può accumulare lungo un percorso. Ogni premio è descritto fornendo le coordinate della casella che lo contiene e il valore del premio: i premi sopra riportati sono descritti dalla seguente lista [[3,2,1],[4,3,7],[3,4,5]]. Un percorso del robot è descritto dalla lista delle coordinate delle caselle attraversate. Un possibile percorso da P (coordinate [5,3]) a Q (coordinate [3,5]) è descritto dalla seguente lista: [[5,3],[3,2],[5,1],[4,3],[3,5]] e ha un totale di premi accumulati pari a 8. Se fosse vietata la direzione ese, il robot non potrebbe saltare da [3,2] a [5,1] e un percorso da P a Q (con valore dei premi pari a 1) potrebbe essere

[[5,3],[3,2],[1,1],[2,3],[3,5]].

PROBLEMA

In un campo di gara di dimensioni 6×6, il robot deve fare un percorso *semplice*, cioè senza passare due volte in una stessa casella, da [1,1] a [5,5]; nel campo sono presenti le caselle interdette descritte dalla seguente lista

[[3,3],[3,4],[4,4]].

I premi distribuiti nel campo di gara sono descritti dalla seguente lista

[[1,1,10],[1,3,11],[2,1,12],[2,3,13],[2,4,7],[3,1,14],[6,3,1]]).

Per compiere il suo percorso, il robot deve pagare, per ogni mossa, un "pedaggio" di 2 unità scalabili dai premi.

Al robot sono, inoltre, vietate le mosse corrispondenti alle direzioni descritte dalla seguente lista:

[sso,sse,oso,ono].

Trovare:

A. il numero N di possibili percorsi semplici diversi;
B. la lista L dei valori dei premi accumulati meno i pedaggi relativi a questi percorsi, elencati in ordine non decrescente.

N	
L	

SOLUZIONE

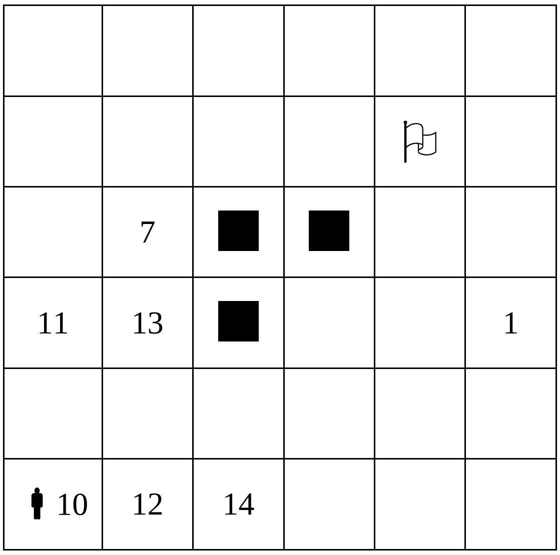
N	6
L	[2,3,9,9,15,16]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Le mosse vietate sono evidenziate dallo schema seguente

	nno		nne	
×				ene
×				ese
	×		×	

Il campo di gara è mostrato nello schema seguente:



I percorsi semplici sono:

- [[1,1],[2,3],[4,2],[6,3],[5,5]], pedaggio 8, premi 24, punteggio 16
- [[1,1],[2,3],[1,5],[3,6],[5,5]], pedaggio 8, premi 23, punteggio 15
- [[1,1],[3,2],[5,1],[6,3],[5,5]], pedaggio 8, premi 11, punteggio 3
- [[1,1],[3,2],[5,1],[4,3],[5,5]], pedaggio 8, premi 10, punteggio 2
- [[1,1],[3,2],[2,4],[3,6],[5,5]], pedaggio 8, premi 17, punteggio 9
- [[1,1],[3,2],[2,4],[4,3],[5,5]], pedaggio 8, premi 17, punteggio 9

ESERCIZIO 5

PREMESSA
Alcuni ragazzi decidono di costruire un ipertesto multimediale sugli avvenimenti storici significativi della loro regione. Per organizzare il progetto, dividono il lavoro in singole attività e assegnano ogni attività a un gruppo di loro.
Le attività sono descritte col seguente termine

a(<sigla attività>,<durata in giorni>,<ragazzi impegnati>);

esempio, il termine a(A1,2,6) significa che l'attività A1 dura due giorni consecutivi e impiega 6 ragazzi.
Le attività non possono svolgersi tutte contemporaneamente, ma devono essere rispettate delle priorità descritte con termini del tipo

p(<precedente>,<successiva>);

come per esempio p(A4,A8) e p(A6,A8); ogni termine esprime il fatto che l'attività (detta successiva) associata alla sigla di destra può iniziare solo quando l'attività (detta precedente) associata alla sigla di sinistra è terminata. Ovviamente se una attività ha più precedenti, può iniziare solo quando *tutte* le precedenti sono terminate; i due termini appena visti implicano che l'attività A8 può iniziare solo dopo che sono terminate le due attività A4 e A6.
N.B. Si dice *prima attività* del progetto quella che non ha precedenti; si dice *ultima attività* del progetto quella che non ha successive; in un progetto "ben fatto" sono uniche.

PROBLEMA
Le attività di questo progetto sono descritte nella seguente lista:

[a(A1,1,4),a(A2,2,2),a(A3,2,2),a(A4,2,2),a(A5,2,2),a(A6,2,2),a(A7,2,2),a(A8,2,2),a(A9,2,2),a(A10,1,4)].

Le priorità sono descritte dalla seguente lista:

[p(A1,A2),p(A1,A3),p(A2,A4),p(A2,A5),p(A3,A6),p(A3,A9),p(A4,A7),p(A5,A7),p(A3,A8),p(A6,A10),p(A7,A10),p(A9,A10),p(A8,A10)].

Si supponga che siano disponibili a lavorare *contemporaneamente* al progetto *solamente* 4 ragazzi; posto che ogni attività inizi *prima possibile* (nel rispetto delle priorità) e col vincolo naturale di non impiegare contemporaneamente più risorse di quelle disponibili, determinare:

- il numero (minimo) N di giorni necessari per completare il progetto;
- il numero di maniere diverse M di organizzare il progetto nel numero N di giorni (cioè il numero di Gantt diversi che si possono costruire.

N	
M	

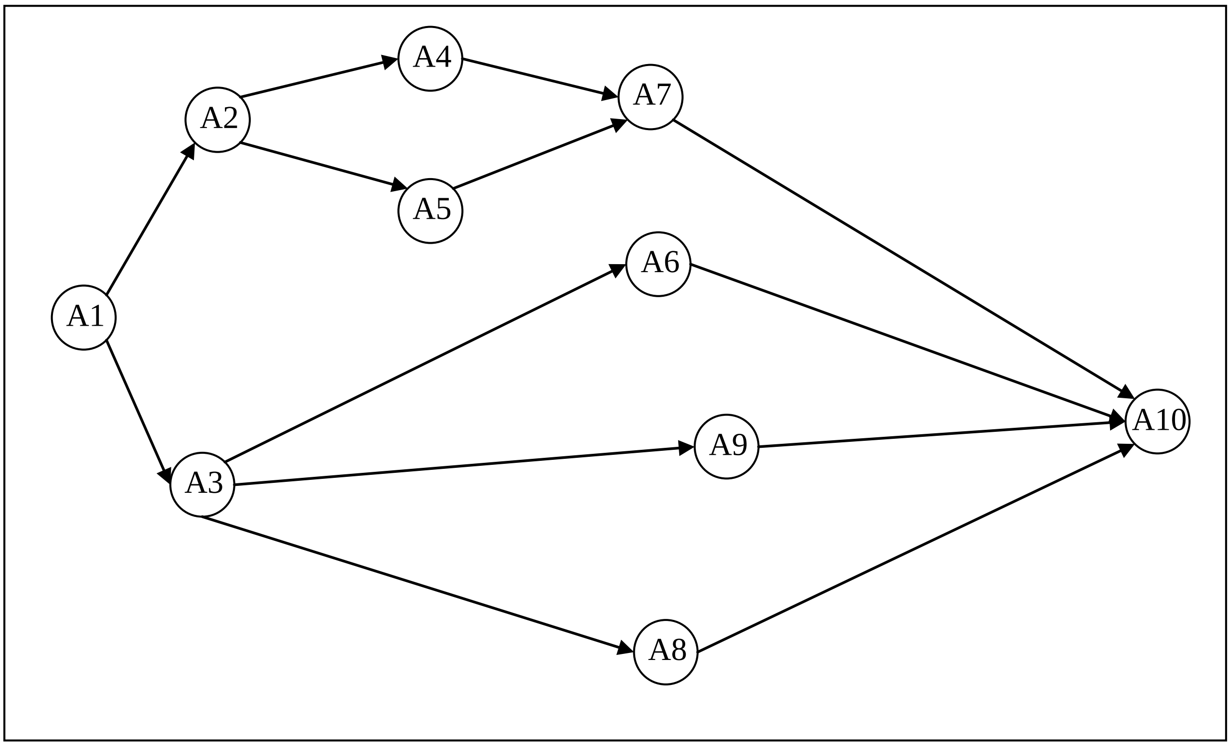
SOLUZIONE

N	10
U	21

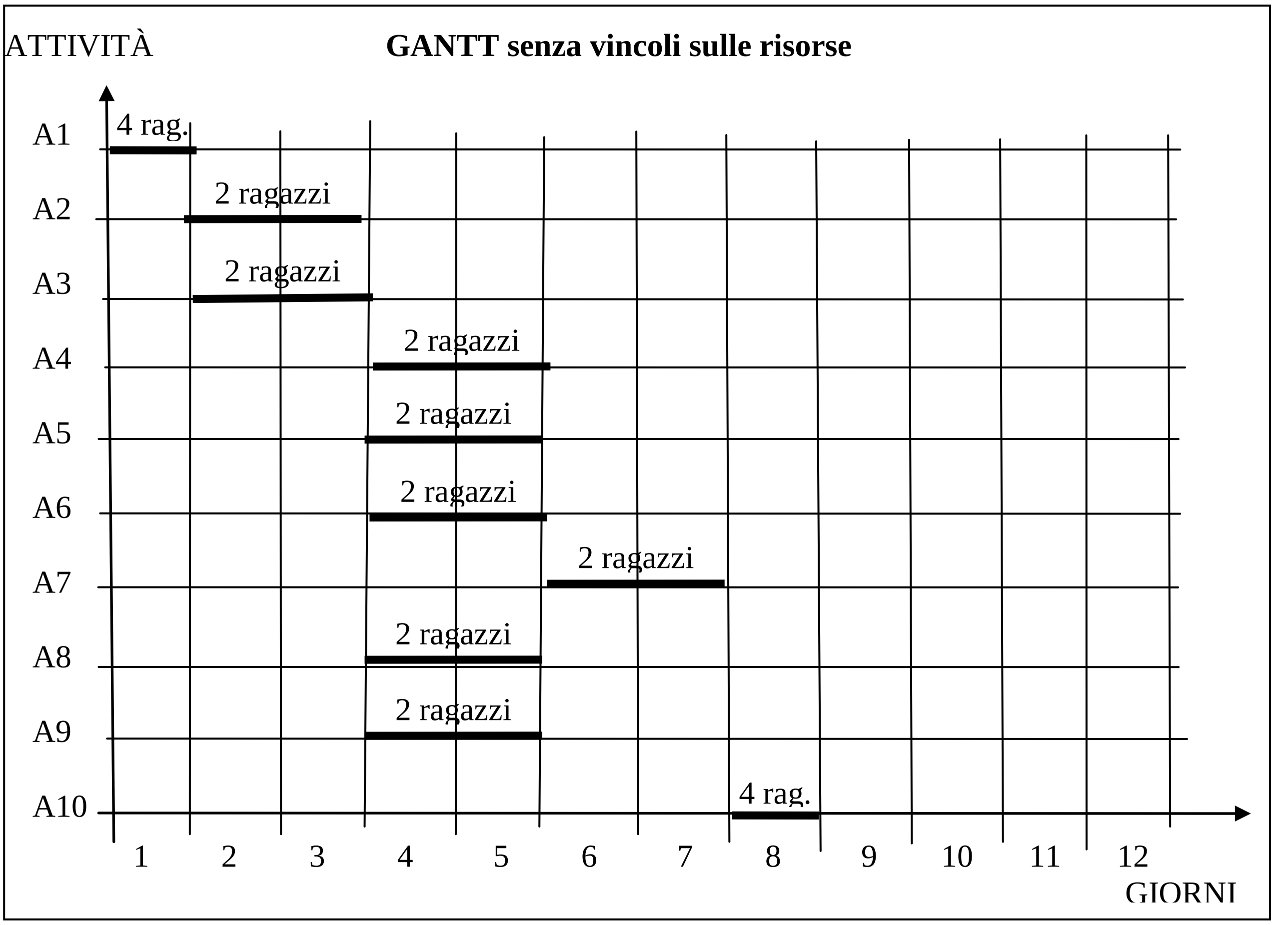
COMMENTI ALLA SOLUZIONE
Come al solito per facilitare la soluzione è utile trasformare in tabella la lista che descrive la durata e le persone relative ad ogni attività.

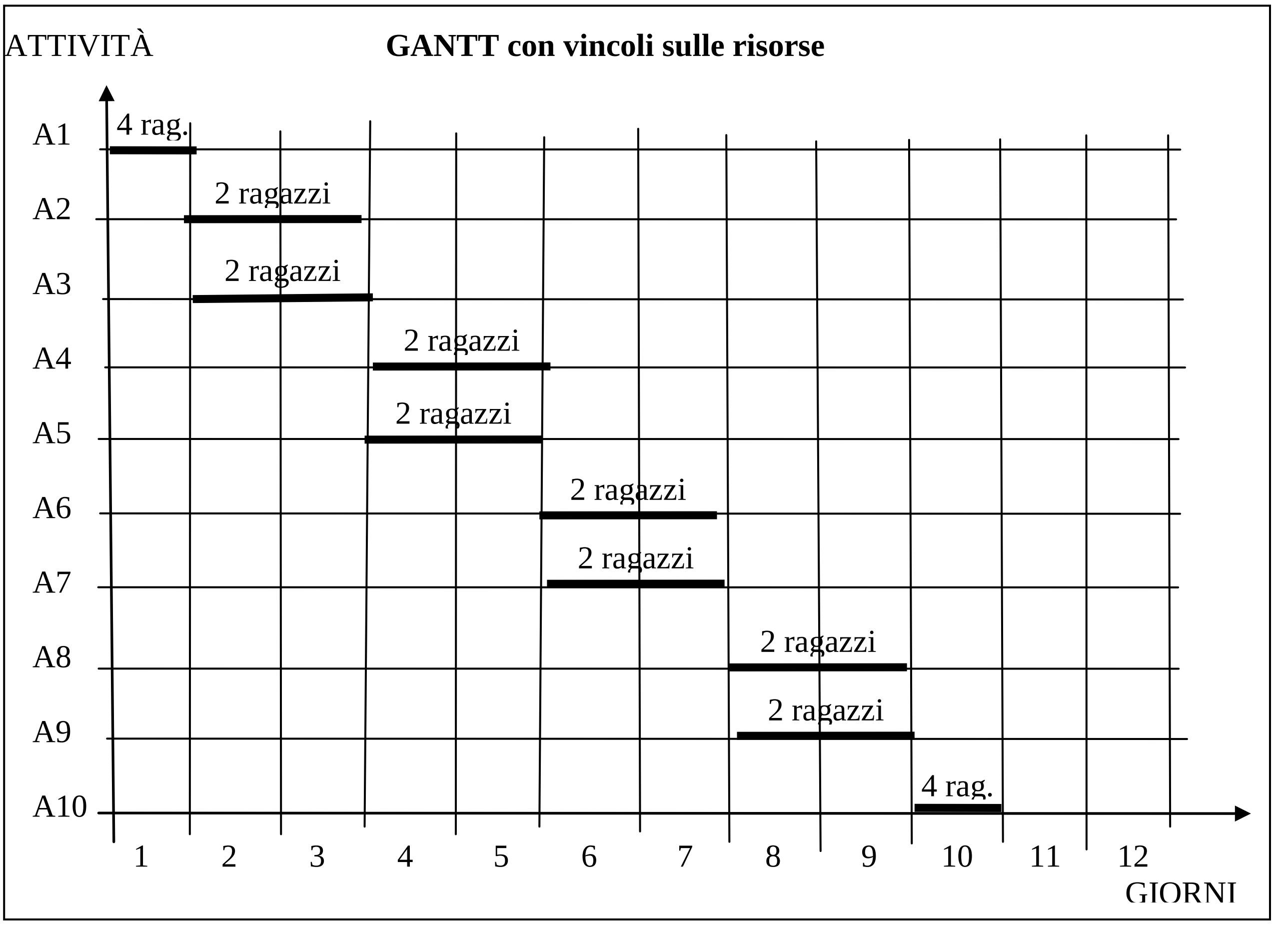
Attività	Durata	Ragazzi
A1	1	4
A2	2	2
A3	2	2
A4	2	2
A5	2	2
A6	2	2
A7	2	2
A8	2	2
A9	2	2
A10	1	4

Successivamente è bene disegnare il diagramma delle precedenze, cioè il grafo che ha come nodi le attività e come frecce le precedenze. Si procede per passi successivi: prima si disegnano in "ordine sparso" dei nodi con etichette che sono le attività (per esempio un cerchietto con la sigla della attività); poi si congiungono con una freccia i nodi che appartengono a un elemento (sottolista) della lista che rappresenta le priorità; successivamente si procede a ridisegnare, per tentativi, il grafo cercando di "disintrecciare" le frecce: di solito ci si riesce completamente, come nell'esempio in figura (ma non sempre è possibile). Si noti che esiste una "prima attività" del progetto (A1 in figura) e una "ultima attività" (A10 in figura).
N.B. È casuale che la prima attività abbia la sigla più piccola e l'ultima la sigla più grande.
Il diagramma delle precedenze esprime in maniera molto "leggibile" la precedenza tra le attività e consente di passare con facilità allo stadio successivo.

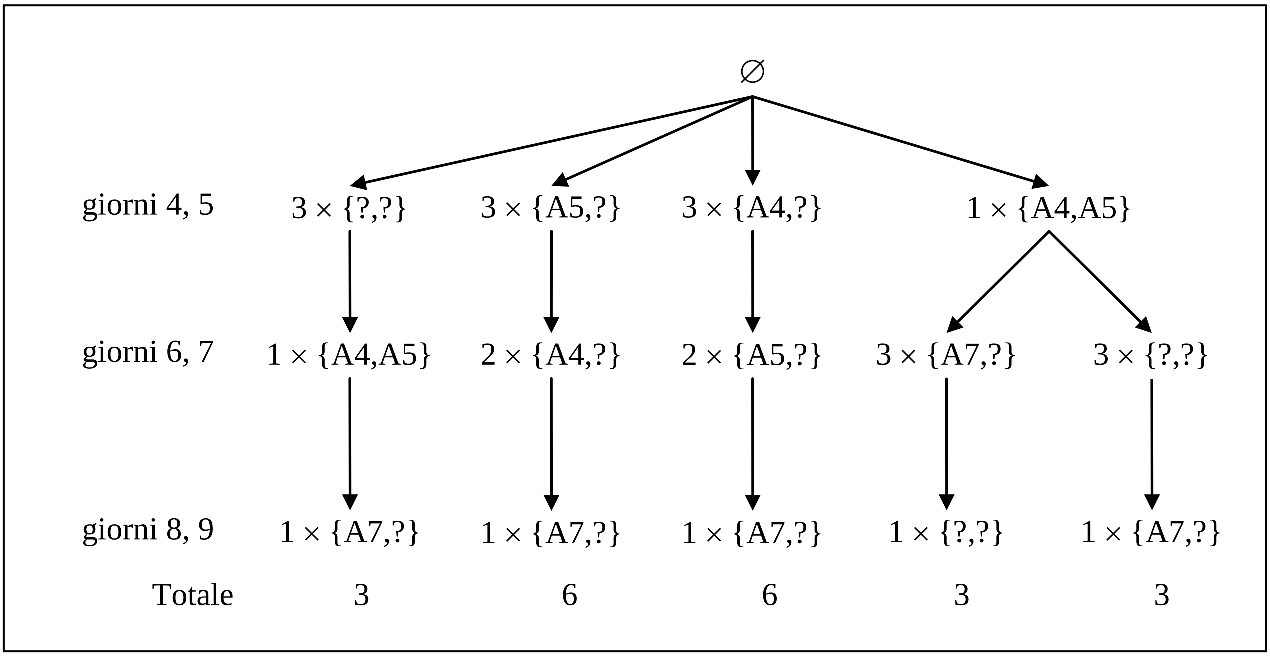


Dal grafo e dalla tabella si può compilare il Gantt; di seguito è mostrato il Gantt "standard" (cioè che *non* tiene conto dei vincoli sulle risorse: la disponibilità di solo 4 ragazzi) che prevede il completamento del progetto in 8 giorni. Successivamente è mostrato un Gantt che, non impiegando più di 4 ragazzi in un giorno, prevede il completamento del progetto in 10 giorni.


ATTIVITÀ
GANTT senza vincoli sulle risorse
A1
A2
A3
A4
A5
A6
A7
A8
A9
A10
4 rag.
2 ragazzi
2 ragazzi
2 ragazzi
2 ragazzi
2 ragazzi
2 ragazzi
2 ragazzi
2 ragazzi
4 rag.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
GIORNI


ATTIVITÀ
GANTT con vincoli sulle risorse
A1
A2
A3
A4
A5
A6
A7
A8
A9
A10
4 rag.
2 ragazzi
2 ragazzi
2 ragazzi
2 ragazzi
2 ragazzi
2 ragazzi
2 ragazzi
2 ragazzi
4 rag.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
GIORNI

Per determinare il numero di Gantt che rispettano il vincolo sulle risorse e terminano in 10 giorni si possono fare le seguenti considerazioni.
Le attività A1, A2, A3 devono essere "fisse in tutti i Gantt (nei primi 3 giorni), come pure l'attività A10 (l'ultimo giorno). Le altre attività, possono comparire a coppie di due (in parallelo) col solo vincolo che A7 deve essere successiva a A4 *e* a A5 (quindi a maggior ragione non può far parte della prima coppia i giorni 4 e 5),
La figura seguente illustra le possibilità: col punto interrogativo "?" si indica una attività diversa da A4, A5, A7 (cioè dell'insieme {A6,A8,A9}); la parentesi graffa indica un insieme (o nel caso di due elementi la coppia *non* ordinata).
Al primo livello di nodi, cioè i giorni 4 e 5, ci possono essere le attività {A4,A5}, oppure tre coppie del tipo {A4,?} o tre del tipo {A5,?} o tre del tipo {?,?}; i rami dell'albero illustrano le possibilità successive: nei livelli successivi, il segno "?" indica la o le attività dell'insieme {A6,A8,A9} che non sono già comparse precedentemente nel ramo



In totale 21 possibilità.

ESERCIZIO 6

PREMESSA
Per descrivere una procedura di calcolo viene spesso usato uno pseudolinguaggio che utilizza parole inglesi e simboli matematici.

PROBLEMA
Compresa la sequenza dei calcoli descritti nella procedura seguente, eseguire le operazioni indicate utilizzando i dati di input sotto riportati e trovare i valori di output.

```
procedure PROVA1;
variables N, W, Q, P, T, I integer;
input N, W;
T ← 0;
for I from 1 to N step 1 do
        Q ← 2;
        P ← 2;
        while Q ≤ W do
                P ← – P;
                Q ← 2 × ((Q + P) /2 + 2);
        endwhile;
        T ← T + Q;
endfor;
output T;
endprocedure;
```

Completare la seguente tabella con i valori di output per T.

input		output
N	W	T
4	20	
6	30	

SOLUZIONE

input		output
N	W	T
4	20	104
6	30	204

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
Le osservazioni cruciali (per evitare molti calcoli) sono:
- il ciclo while è ripetuto, all'interno del ciclo for per ogni valore di I, sempre nella stessa maniera;
- il valore della variabile P cambia di segno ad ogni esecuzione del ciclo while.

I valori delle variabili coinvolte sono riportati nella seguente tabella per il primo input.

	W	P	Q
valore delle variabili prima dell'esecuzione 1 del ciclo while	20	2	2
valore delle variabili dopo la esecuzione 1 del ciclo while	20	–2	4
valore delle variabili dopo la esecuzione 2 del ciclo while	20	2	10

valore delle variabili dopo la esecuzione 3 del ciclo while	20	–2	12
valore delle variabili dopo la esecuzione 4 del ciclo while	20	2	18
valore delle variabili dopo la esecuzione 5 del ciclo while	20	–2	20
valore delle variabili dopo la esecuzione 6 del ciclo while	20	2	26

Quindi il valore di T è uguale al valore di Q moltiplicato il valore di N, cioè è 104.
Per il secondo input, analogamente si ha:

	W	P	Q
valore delle variabili prima dell'esecuzione 1 del ciclo while	30	2	2
valore delle variabili dopo la esecuzione 1 del ciclo while	30	–2	4
valore delle variabili dopo la esecuzione 2 del ciclo while	30	2	10
valore delle variabili dopo la esecuzione 3 del ciclo while	30	–2	12
valore delle variabili dopo la esecuzione 4 del ciclo while	30	2	18
valore delle variabili dopo la esecuzione 5 del ciclo while	30	–2	20
valore delle variabili dopo la esecuzione 6 del ciclo while	30	2	26
valore delle variabili dopo la esecuzione 7 del ciclo while	30	–2	28
valore delle variabili dopo la esecuzione 8 del ciclo while	30	2	34

Quindi il valore di T è uguale al valore di Q moltiplicato il valore di N, cioè è 204.

ESERCIZIO 7

PREMESSA
Per descrivere una procedura di calcolo viene spesso usato uno pseudolinguaggio che utilizza parole inglesi e simboli matematici.

PROBLEMA
Compresa la sequenza dei calcoli descritti nella procedura seguente, eseguire le operazioni indicate utilizzando i dati di input sotto riportati e trovare i valori di output.

```
procedure PROVA2;
variables A, B, C, D, N, I integer;
input N, A, B, C, D;
for I from 1 to N step 1 do
        C ← A + B –  C – D;
        D ← A + D + C;
        A ← C – B – D;
        B ← A + B + D;
endfor;
output A, B, C, D;
endprocedure;
```

Con i valori di input indicati, calcolare i rispettivi valori di output

input					output			
N	A	B	C	D	A	B	C	D
6	1	1	1	1				
6	2	2	2	2				

SOLUZIONE

input					output			
N	A	B	C	D	A	B	C	D
6	1	1	1	1	86	29	29	–18
6	2	2	2	2	172	58	58	–36

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
Per il primo insieme dei valori di input, i valori delle variabili sono descritti dalla seguente tabella.

	I	N	A	B	C	D
valore delle variabili prima dell’esecuzione 1 del ciclo for	\	6	1	1	1	1
valore delle variabili dopo la esecuzione 1 del ciclo for	1	6	–3	0	0	2
valore delle variabili dopo la esecuzione 2 del ciclo for	2	6	1	–5	–5	–6
valore delle variabili dopo la esecuzione 3 del ciclo for	3	6	10	7	7	2
valore delle variabili dopo la esecuzione 4 del ciclo for	4	6	–19	8	8	20
valore delle variabili dopo la esecuzione 5 del ciclo for	5	6	–9	–39	–39	–38
valore delle variabili dopo la esecuzione 6 del ciclo for	6	6	86	29	29	–18

Per il secondo insieme di valori di input, basta osservare che N ha lo stesso valore del primo insieme, quindi il ciclo for viene ripetuto lo stesso numero di volte. I valori iniziali delle altre variabili sono il doppio di quelli del primo insieme: quindi, *poiché tutte le operazioni sono lineari* (non ci sono moltiplicazioni tra variabili) i valori finali saranno il doppio di quelli precedenti.

ESERCIZIO 8

PREMESSA
Un cinema multisala proietta *cinque* diversi titoli, di grande richiamo (quindi ha *cinque* sale). La direzione, invece di vendere i biglietti secondo l'ordine di arrivo dei clienti fino ad esaurimento dei posti di ogni sala, decide di fare una *prevendita* col seguente metodo:

- al momento dell'acquisto, ogni cliente paga e indica fino a *tre* titoli tra quelli in programma, in ordine di preferenza;
- alla chiusura della prevendita, per ogni titolo (cioè per ogni sala) viene fatta un'estrazione tra *tutti* i clienti che hanno espresso una preferenza per quel titolo.

Il risultato è, per ogni titolo, la graduatoria (*in ordine di estrazione*) dei clienti che desiderano vederlo, ciascuno con la propria preferenza (ogni cliente compare al più in tre graduatorie distinte, con preferenze diverse in ciascuna).
Se si indicano i clienti con le lettere dell'alfabeto e le loro preferenze con le cifre 1 (preferenza massima), 2, 3 (preferenza minima), una possibile situazione delle graduatorie con 6 clienti (A, B, C, D, E, F) dopo l'estrazione potrebbe essere la seguente:

Sala1: [C1, A2, B1, D1, E3]
Sala2: [F1, B2, A1]
Sala3: [B3, C2]
Sala4: [D2, C3, E2, F2]
Sala5: [A3, D3, E1]

(Si noti che F ha espresso due sole preferenze.)
La direzione del cinema procede ora ad assegnare i posti ai clienti, in modo da rispettare i seguenti quattro *vincoli*:

1. **posto**: ad ogni cliente è assegnato al più un solo posto (e relativo biglietto).
2. **capienza**: per ogni sala vengono assegnati al più un numero di posti pari alla capienza della sala; se per una sala sono assegnati meno posti della sua capienza, allora ogni cliente di quella graduatoria riceve un posto, in quella graduatoria o in un'altra per lui preferibile.
3. **graduatoria**: se nella graduatoria di una certa sala, il cliente X precede il cliente Y e a Y viene assegnato un posto (per questa o per altre sale), allora anche a X viene assegnato un posto, in quella graduatoria o in un'altra per lui preferibile.
4. **rimborso:** vengono rimborsati tutti i clienti ai quali (con queste regole) non può essere assegnato un posto.

Il secondo vincolo (**capienza**) è stato così formulato perché la direzione del cinema desidera assegnare tutti i posti di una sala (escludendo, in particolare, l'assegnamento vuoto *per ogni* sala), cercando però di scontentare il meno possibile i clienti.
Se si suppone, nell'esempio di prima, che le cinque sale contengono ciascuna 2 posti, assegnamenti di posti *ammissibili* (cioè che rispettano i vincoli) sono i seguenti:

Sala1: [C1,A2]
Sala2: [F1,B2]
Sala3: []
Sala4: [D2]
Sala5: [E1]

Sala1: [C1,B1]
Sala2: [F1,A1]
Sala3: []

Sala4: [D2]
Sala5: [E1]

(Si può osservare che il secondo assegnamento è “preferibile” al primo perché solo un cliente riceve un posto per una pellicola che non sia la sua prima scelta; comunque questa considerazione non è rilevante nel presente contesto.)

Il seguente assegnamento, invece, *non* è *ammissibile*, perché viola la seconda parte del secondo vincolo: il cliente E è in graduatoria con la massima preferenza per Sala5 (che chiude sotto la propria capienza), ma gli viene assegnato un posto (in Sala4) per lui *meno* preferibile:

Sala1: [C1,A2]
Sala2: [F1,B2]
Sala3: []
Sala4: [D2,E2]
Sala5: []

N.B. Un assegnamento si può esprimere come lista di cinque liste (la prima relativa a Sala1, la seconda relativa a Sala2 e così via fino a Sala5) ciascuna di due elementi (uno per posto); i tre assegnamenti appena visti sono rispettivamente:

[[C1,A2], [F1,B2],[], [D2],[E1]]

[[C1,B1], [F1,A1],[],[D2],[E1]]

[[C1,A2],[F1,B2],[],[D2,E2],[]]

PROBLEMA
Alla chiusura della prevendita, alla quale si sono presentati 10 clienti (A, B, C, D, E ,F, G, H, L, M che hanno espresso ciascuno tre preferenze) il sorteggio dà la seguente graduatoria:

Sala1: [A1, B3, C2, D1, E3, F3, G1]
Sala2: [D3, B2, F2, G3, H2, L3,M1]
Sala3: [B1, C1, G2, L1, M2]
Sala4: [A2, C3, E2, F1, H3]
Sala5: [A3, D2, E1,H1,L2, M3]

Ipotizzando sempre che le cinque sale abbiano ciascuna due posti disponibili, compilare la lista L di tutti i possibili assegnamenti ammissibili, cioè che verificano i vincoli.
N.B. La lista L è una lista (di liste di (5) liste (di 2 elementi)); è la lista vuota se non esiste alcun assegnamento che soddisfa i vincoli.

L	

SOLUZIONE

L	[[[A1,D1], [G3,L3], [B1,C1,], [F1],[E1,H1]]]

COMMENTO ALLA SOLUZIONE
La soluzione è unica, cioè esiste un solo assegnamento che soddisfa i vincoli:
Sala1: [A1,D1]
Sala2: [G3,L3]
Sala3: [B1,C1]

Sala4: [F1]
Sala5: [E1,H1]

Per individuare una procedura generale per risolvere il problema si può (cominciare con l') osservare che ci possono essere molte soluzioni ammissibili, ma tutte certamente condividono l'assegnamento del posto ai clienti con preferenza 1 in posizione *utile*: innanzitutto, cioè, le preferenze 1 nelle prime *due posizioni* di una graduatoria (quanti sono i posti in una sala) devono certo ricevere il posto; di conseguenza lo stesso cliente nelle altre graduatorie può essere depennato, in qualsiasi posizione si trovi:

Sala1: [A1, ~~B3~~, ~~C2~~, D1, E3, F3, G1]
Sala2: [D3, ~~B2~~, F2, G3, H2, L3,M1]
Sala3: [B1, C1, G2, L1, M2]
Sala4: [~~A2~~, ~~C3~~, E2, F1, H3]
Sala5: [~~A3~~, D2, E1,H1,L2, M3]

Adesso, Sala3 è già completa; in Sala1 si può assegnare il biglietto al prossimo in graduatoria: essendo una preferenza 1 non ci sono altre possibilità (per il vincolo **graduatoria**, se fosse E3 a ricevere il posto, anche D avrebbe dovuto riceverlo; d'altra parte, non si può chiudere l'assegnamento di Sala1 solo con A1, per la seconda parte del vincolo **capienza**: D1 *deve* ricevere un posto in Sala1). D può essere depennato dalle altre graduatorie (e anche Sala1 è completa):

Sala1: [A1, ~~B3~~, ~~C2~~, D1, E3, F3, G1]
Sala2: [~~D3~~, ~~B2~~, F2, G3, H2, L3,M1]
Sala3: [B1, C1, G2, L1, M2]
Sala4: [~~A2~~, ~~C3~~, E2, F1, H3]
Sala5: [~~A3~~, ~~D2~~, E1,H1,L2, M3]

Adesso è Sala5 che può immediatamente essere completata, depennando E e H dalle altre sale:

Sala1: [A1, ~~B3~~, ~~C2~~, D1, ~~E3~~, F3, G1]
Sala2: [~~D3~~, ~~B2~~, F2, G3, ~~H2~~, L3, M1]
Sala3: [B1, C1, G2, L1, M2]
Sala4: [~~A2~~, ~~C3~~, ~~E2~~, F1, ~~H3~~]
Sala5: [~~A3~~, ~~D2~~, E1,H1,L2, M3]

Anche Sala4 è completata; chiude sotto la sua capienza, ma tutti quelli in graduatoria hanno avuto un posto per loro preferibile:

Sala1: [A1, ~~B3~~, ~~C2~~, D1, ~~E3~~, ~~F3~~, G1]
Sala2: [~~D3~~, ~~B2~~, ~~F2~~, G3, ~~H2~~, L3, M1]
Sala3: [B1, C1, G2, L1, M2]
Sala4: [~~A2~~, ~~C3~~, ~~E2~~, F1, ~~H3~~]
Sala5: [~~A3~~, ~~D2~~, E1,H1,L2, M3]

e di conseguenza anche Sala2 può venire completata nell'unico modo che rispetta il vincolo **graduatoria**.

In conclusione, c'è un unico assegnamento ammissibile (resta escluso lo spettatore M che viene rimborsato).
Sala1: [A1, D1]

Sala2: [G3, L3]
Sala3: [B1, C1]
Sala4: [F1]
Sala5: [E1,H1]

N.B. Mentre in questo caso è bastato considerare solo le preferenze “1”, in generale non è sufficiente a completare l’assegnamento e si deve continuare prendendo in esame le preferenze inferiori.

ESERCIZIO 9

PROBLEMA

La funzione $f(n)$ (da numeri interi a numeri interi) è definita dalle seguenti relazioni:

$f(n) = n - 10$ se $n > 100$;
$f(n) = f(f(n + 11))$ se $n \leq 100$.

Si costruisca la lista L dei valori di $f(100)$, $f(91)$, $f(120)$, $f(89)$, $f(1)$, da riportare nell'ordine indicato.

L	

SOLUZIONE

L	[91,91,110,91,91]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

La funzione f è nota col nome di "funzione 91 di McCarthy" dal nome dell'informatico che l'introdusse agli inizi degli anni '70.
Non è molto difficile vedere che la valutazione della $f(n)$ è 91 per *tutti* gli argomenti interi $n \leq 100$.
Innanzitutto si osservi che la funzione è definita *esplicitamente* se è $n > 100$, mentre è definita *ricorsivamente* se è $n \leq 100$ (in termini di n più grandi): quindi i casi "semplici" sono quelli per n elevati.
(Si noti il comportamento "opposto" a quello della funzione di Fibonacci che è definita esplicitamente per (due) casi semplici e ricorsivamente per i casi con n elevato.)
Procedendo alla valutazione diretta (*bottom up*: in questo caso dai valori alti a quelli bassi!) per qualche valore di n si ha:

	$f(103) =$	poiché $103 > 100$;
=	93	

	$f(102) =$	poiché $102 > 100$;
=	92	

	$f(101) =$	poiché $101 > 100$;
=	91	

	$f(100) =$	poiché $100 \leq 100$
=	$f(f(111)) =$	poiché $111 > 100$
=	$f(101) =$	$f(101)$ già calcolato!
=	91	

	$f(99) =$	poiché $99 \leq 100$
=	$f(f(110)) =$	poiché $110 > 100$
=	$f(100) =$	$f(100)$ già calcolato!
=	91	

	$f(98) =$	poiché $98 \leq 100$
=	$f(f(109)) =$	poiché $109 > 100$
=	$f(99) =$	$f(99)$ già calcolato!
=	91	

… e così via fino a 90.
Successivamente è ancora più facile:

	$f(89)$ =	poiché $89 \leq 100$
=	$f(f(100))$ =	$f(100)$ già calcolato!
=	$f(91)$ =	$f(91)$ già calcolato!
=	91	

… e così via fino a 1, perché la valutazione per ogni numero è ricondotta a quella di uno precedente (più grande) di 11, già calcolato, e quindi a $f(91) = 91$. (Si dice che 91 è un *punto unito* per *f*.)

Il calcolo *bottom up* (cioè a partire dai "casi semplici") della funzione di McCarthy è facile come l'analogo calcolo della funzione di Fibonacci; è invece molto più "difficile" quello *top down*; per esempio:

$f(89) = f(f(100)) =$
$= f(f(f(111))) =$
$= f(f(101)) =$
$= f(91) =$
$= f(f(102)) =$
$= f(92) =$
$= f(f(103)) =$
$= f(93) =$
$= f(f(104)) =$
$= f(94) =$
$= f(f(105)) =$
$= f(95) =$
…
$= f(99) =$
$= f(f(110)) =$
$= f(100) =$
$= f(f(111) =$
$= f(101) =$
$= 91$

Si consideri inoltre il seguente esempio:

$f(87) = f(f(98)) =$
$= f(f(f(109))) =$
$= f(f(99)) =$
$= f(f(110)) =$
$= f(100) =$
$= f(f(111) =$
$= f(101) =$
$= 91$

Si noti che molti calcoli (parziali) fatti per valutare $f(89)$ sono ripetuti per valutare $f(87)$; mentre nelle valutazioni *bottom up* (almeno se fatte con carta e matita) i risultati già ottenuti sono *naturaliter* "conservati" e utilizzati al bisogno, nelle valutazioni top down questo "risparmio" (indispensabile per casi complessi) richiede di essere realizzato esplicitamente.

ESERCIZIO 10

PROBLEMA

The pupils of a school love practice four sports: 65 percent of the pupils race by bicycle, 75 percent run very fast, 85 percent are strong jumpers and 95 percent can swim for long time. What is the *minimum* percentage P of pupils that enjoy all four sports? And what is the *maximum* percentage M of pupils that enjoy all four sports?

In the following table write a percentage as *decimal* number between 0.0 an 100.0: for example 60 percent should be written as 60.0 and 43 percent should be written as 43.0.

P	
M	

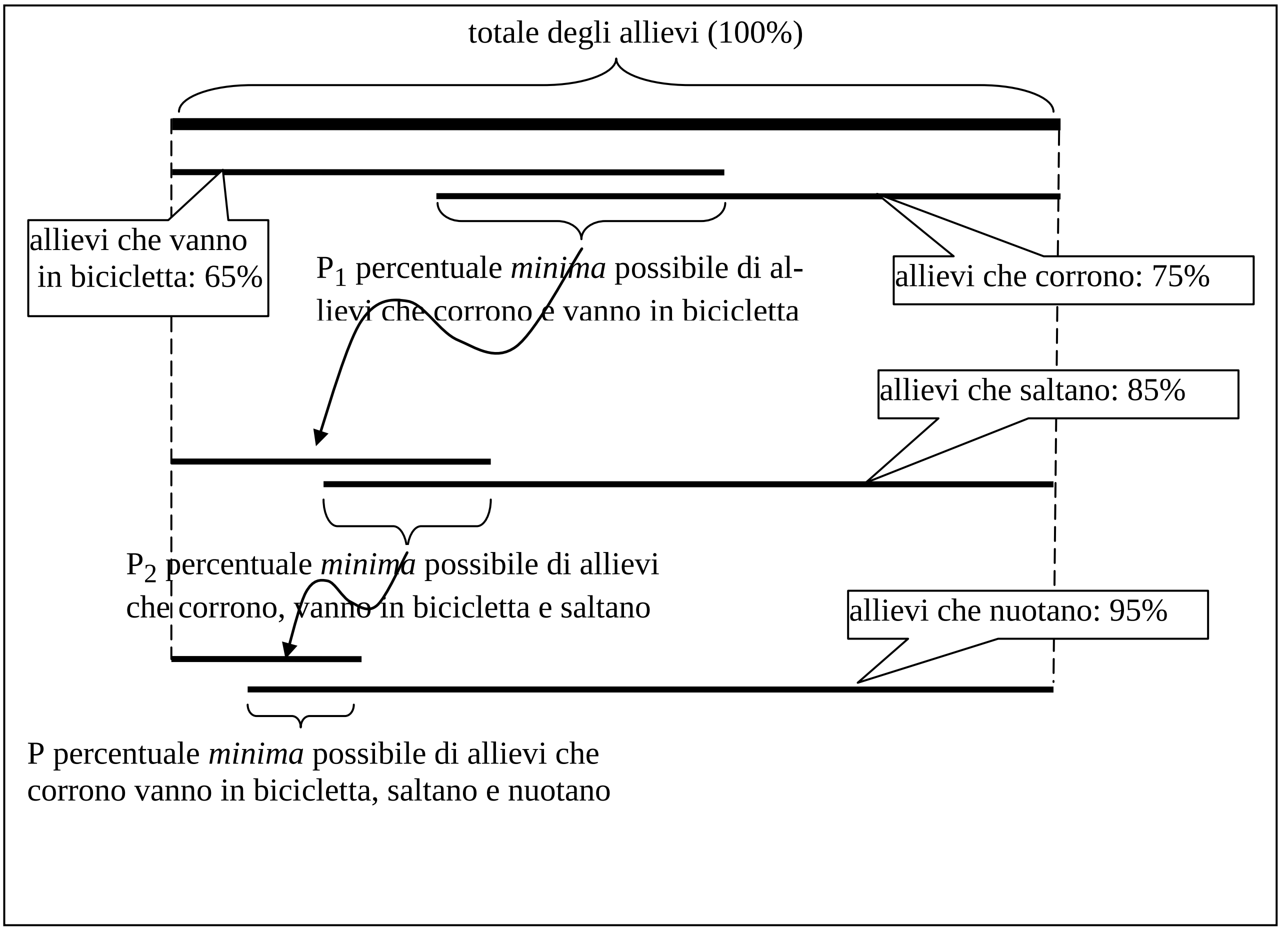
SOLUZIONE

P	20.0
M	65.0

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

È chiaro che M = min(65%,75%,85%,95%) = 65%.

Dalla seguente figura è desumibile facilmente la percentuale *minima* P_1 degli allievi che vanno in bicicletta e corrono come pure la minima percentuale P_2 degli allievi che vanno in bicicletta, corrono e saltano, e quindi la percentuale P



P_1 = 65% + 75% – 100% = 40%

Iterando il ragionamento:

$P = 65\% + 75\% + 85\% + 95\% - 100\% \times 3 = 20\%$