

ESERCIZIO 1

PREMESSA

Per risolvere problemi spesso esistono delle regole che, dai dati del problema, permettono di calcolare o *dedurre* la soluzione. Questa situazione si può descrivere col termine regola(<sigla>,<lista antecedenti>,<conseguente>)

che indica una regola di nome <sigla> che consente di dedurre <conseguente> conoscendo tutti gli elementi contenuti nella <lista antecedenti>, detta anche *premessa*. Problemi “facili” possono essere risolti con una sola regola; per problemi “difficili” una sola regola non basta a risolverli, ma occorre applicarne diverse in successione.

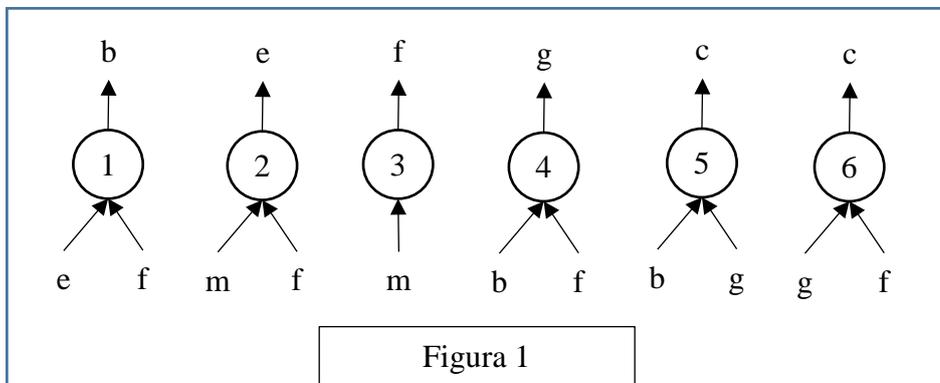
Si considerino le seguenti regole:

regola(1,[e,f],b)      regola(2,[m,f],e)      regola(3,[m],f)  
 regola(4,[b,f],g)      regola(5,[b,g],c)      regola(6,[g,f],c)

Per esempio la regola 1 dice che si può calcolare (o dedurre) **b** conoscendo **e** ed **f** (cioè gli elementi della lista [e,f]); conoscendo **b** ed **f** (cioè gli elementi della lista [b,f]) è possibile dedurre **g** con la regola 4. Quindi, a partire da **e** ed **f** è possibile dedurre prima **b** (con la regola 1) e poi **g** (con la regola 4).

Un *procedimento di deduzione* (o deduttivo, o di calcolo) è rappresentato da un *insieme di regole da applicare in sequenza opportuna* per dedurre un certo elemento (incognito) a partire da certi dati: quindi può essere descritto dalla lista delle sigle di queste regole. Il procedimento [1,4] descrive la soluzione del problema: “dedurre **g** a partire da **e** ed **f**”.

Una maniera grafica per rappresentare le regole è quella mostrata nella seguente figura 1: consiste nell’associare un albero (rovesciato) ad ogni regola: la radice (in alto) è il conseguente, le foglie (in basso) sono gli antecedenti.

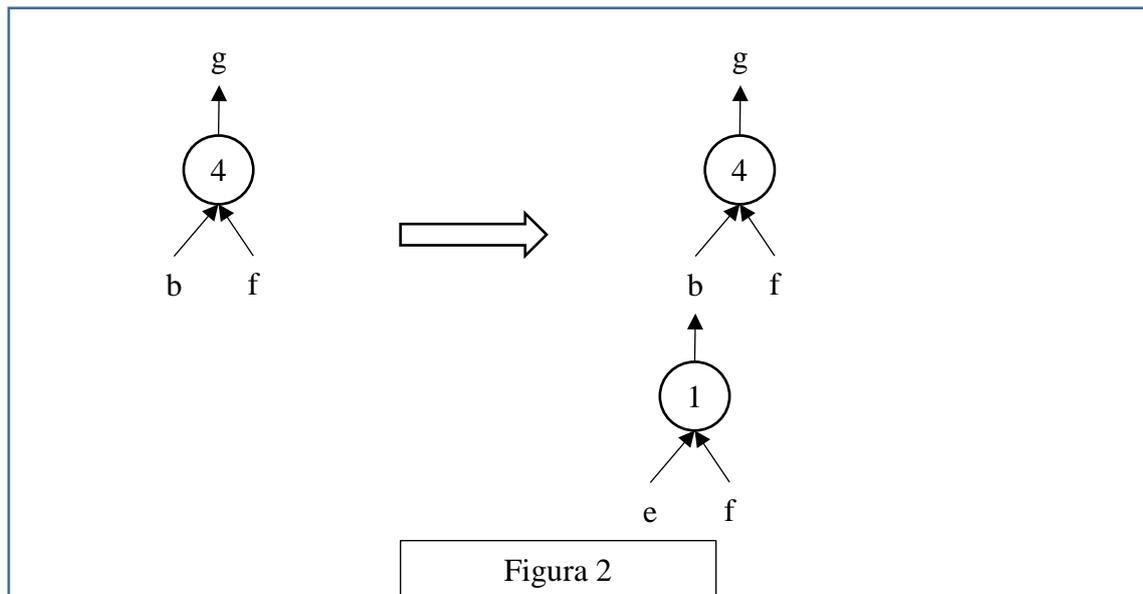


Con questa rappresentazione grafica, risolvere il problema “dedurre **g** a partire da **e** ed **f**” è particolarmente facile; si cerca un “albero” (cioè una regola) che ha come radice l’incognita (cioè **g**): in questo caso ne esiste solo uno che è la regola 4: si veda la figura 2 a sinistra.

Le foglie di questo albero (**b** ed **f**) *non* sono tutte note: quelle note (**f** in questo caso) sono vere e proprie foglie, quelle incognite (**b** in questo caso) vanno considerati come “anelli” a cui “appendere” un altro albero; quindi bisogna continuare *sviluppando* la foglia incognita **b**, cioè “appendendo” a **b** l’albero rappresentato dalla regola 1, come illustrato nella figura 2 a destra.

Adesso tutte le foglie dell’albero così ottenuto (**e** ed **f**) sono note e il problema è risolto.

Si può anche dire che un albero le cui foglie sono tutte note rappresenta un procedimento per dedurre la “radice” a partire dalle “foglie”. Per costruire la lista corrispondente occorre *partire dal basso*: prima si applica la regola 1, che utilizza solo i dati; poi si può applicare la regola 4. Il procedimento è quindi (individuato dalla lista) [1,4].

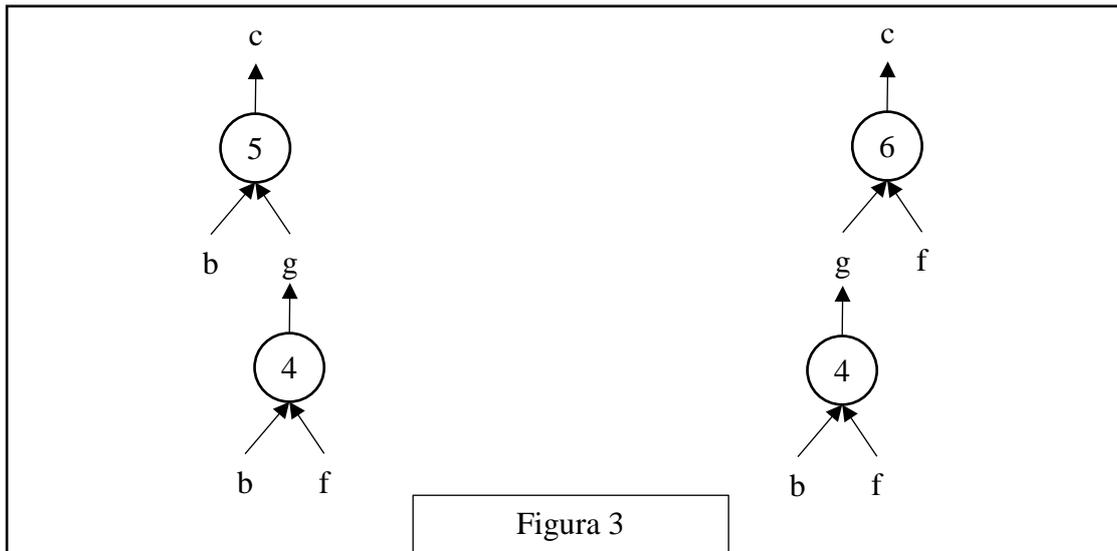


N.B. Nella lista non ci sono regole *ripetute*: infatti un procedimento di deduzione è un *insieme* di regole da applicare in opportuna sequenza. L'applicazione di una regola rende disponibile il conseguente da utilizzare (come antecedente) nell'applicazione di regole successive.

Nelle liste richieste le sigle delle regole sono elencate nell'ordine che corrisponde alla sequenza di applicazione: la prima (a sinistra) della lista deve essere la sigla che corrisponde alla prima regola da applicare (che ha come antecedenti solo dati); l'ultima (a destra) deve essere la sigla della regola che ha come conseguente l'elemento incognito da dedurre.

Per rendere unica la lista associata a un ben preciso procedimento (cioè a un ben preciso insieme di regole), si costruisce tale lista per passi successivi a partire dal primo elemento che è la sigla della prima regola da applicare; ad ogni passo, se ci fossero più regole applicabili, *per quel procedimento*, occorre dare la precedenza (nella lista) alla regola con sigla *inferiore*.

N.B. In alcuni casi esistono più procedimenti deduttivi possibili che permettono di ricavare un certo elemento dagli stessi dati in maniere diverse (cioè con *insiemi diversi di regole* e quindi con alberi diversi). Per esempio il problema “dedurre **c** a partire da **b** ed **f**” (dalle regole viste sopra) ha due distinti procedimenti risolutivi; gli alberi relativi ai due procedimenti sono mostrati nella seguente figura 3.



Le liste associate sono, rispettivamente, [4,5] e [4,6].

In un procedimento deduttivo, il numero di regole *differenti* coinvolte (e, quindi, anche il numero di elementi della lista corrispondente al procedimento) si dice *lunghezza* del procedimento.

**PROBLEMA**

Siano date le seguenti regole:

- |                   |                   |                     |
|-------------------|-------------------|---------------------|
| regola(1,[a,c],p) | regola(2,[b],q)   | regola(3,[a,p],r)   |
| regola(4,[b,q],d) | regola(5,[r,p],z) | regola(6,[b,d,q],z) |

Trovare:

1. la lista L1 che rappresenta il procedimento per dedurre **z** da **a** e **p**;
2. la lista L2 che rappresenta il procedimento per dedurre **z** da **b**;
3. il numero N di procedimenti possibili diversi per dedurre **z** da **a**, **b** e **c**.

L1	
L2	
N	

**SOLUZIONE**

L1	[3,5]
L2	[2,4,6]
N	2

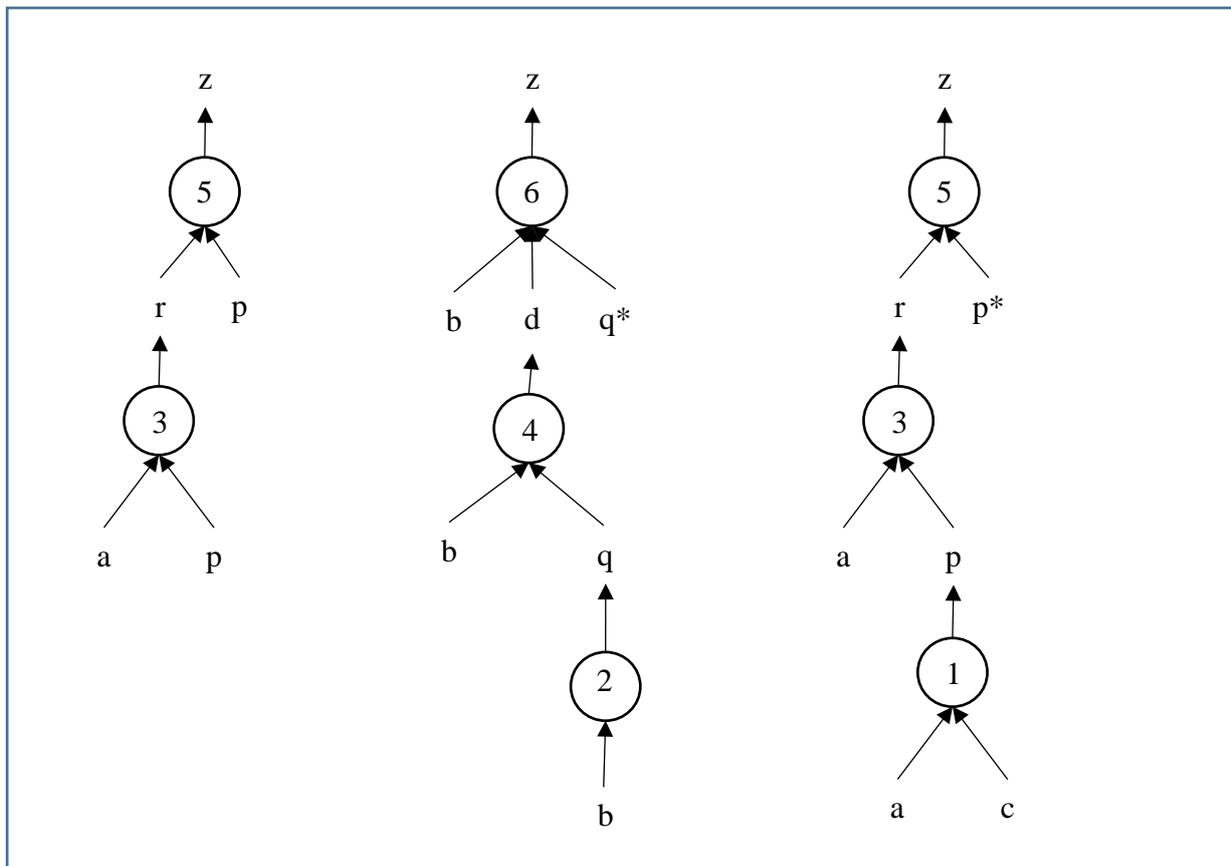
**COMMENTI ALLA SOLUZIONE**

Per la prima domanda si osserva che **z** è deducibile con la regola 5, che ha come antecedenti **r** e **p**, e con la regola 6, che ha come antecedenti **b**, **d**, **q**: conviene provare con la prima regola che ha un dato tra gli antecedenti. Si vede subito che **r** è deducibile (solo) con la regola 3, che ha come antecedenti solo dati. Quindi il procedimento risolutivo è [3,5]. Occorre comunque controllare se esiste un altro procedimento che termina con la regola 6; è facile concludere negativamente, perché **b** non è dato e non è deducibile con alcuna regola.

Per la seconda domanda ci si trova nella situazione opposta: conviene provare con la regola 6 che contiene un dato (**b**) tra gli antecedenti; infatti con la regola 2 si deduce **q** (a partire da **b**, dato) e con la regola 4 si deduce **d**, a partire da **b** (dato) e **q** (appena dedotto). Quindi il procedimento è [2,4,6]. È immediato controllare che non è usabile la regola 5, perché **a** non è dato e non è deducibile.

Per la terza domanda si può utilizzare il lavoro appena svolto: innanzitutto esiste un procedimento per dedurre **z** che è quello individuato nella risposta alla seconda domanda, visto che **b** è dato. È utilizzabile anche il lavoro svolto per rispondere alla prima domanda: infatti da **a** e **c**, con la regola 1 è deducibile **p**: quindi un secondo procedimento è [1,3,5]. A questo punto è facile convincersi che non ci sono altre maniere di applicare le due regole 5 e 6.

I tre procedimenti di cui si parla sono illustrati nella seguente figura.



ESERCIZIO 2

PREMESSA

In un foglio a quadretti è disegnato un “campo di gara”, per esempio di 14 quadretti in orizzontale e 5 in verticale (vedi figura).

									S				
					P								
→													

Ogni casella può essere individuata da due numeri (interi); per esempio la casella contenente P è individuata da essere nella sesta colonna (da sinistra) e nella terza riga (dal basso): brevemente si dice che ha *coordinate* [6,3]; la prima coordinata (in questo caso 6) si dice *ascissa* e la seconda (in questo caso 3) si dice *ordinata*. Le coordinate della casella contenente S sono [10,4] e di quella contenente la freccia sono [1,1].

La freccia può essere pensata come un robot, in questo caso rivolto verso destra; lo stato del robot può quindi essere individuato da tre “valori”: due per le coordinate della casella che occupa e uno per indicare il suo orientamento. Per quest’ultimo si possono usare i simboli della stella dei venti: E, S, W, N: per indicare che il robot è rivolto, rispettivamente, a *destra*, in *basso*, a *sinistra*, in *alto* (con riferimento a chi guarda il foglio); lo stato del robot, rappresentato dalla freccia nella figura è [1,1,E].

Il robot può eseguire tre tipi di comandi:

- girarsi di 90 gradi in senso *orario*: comando **o**;
- girarsi di 90 gradi in senso *antiorario*: comando **a**;
- avanzare di una casella (nel senso della freccia, mantenendo l’orientamento): comando **f**.

Questi comandi possono essere concatenati in sequenze in modo da permettere al robot di compiere vari percorsi; per esempio la sequenza di comandi descritta dalla lista [f,f,f,f,f,a,f,f] fa spostare il robot dalla posizione e orientamento iniziali mostrati in figura fino alla casella P; le caselle via via occupate (quella di partenza e quella di arrivo comprese) sono quelle della lista:

[[1,1],[2,1],[3,1],[4,1],[5,1],[6,1],[6,2],[6,3]].

Stessa casella di arrivo si raggiunge con la lista di comandi [a,f,f,o,f,f,f,f], ma il percorso è diverso ed è descritto dalla lista

[[1,1],[1,2],[1,3],[2,3],[3,3],[4,3],[5,3],[6,3]].

Inoltre, nel primo caso lo stato l’orientamento finale del robot è verso l’alto (stato [6,3,N]), mentre nel secondo caso l’orientamento finale è verso destra (stato [6,3,E]).

PROBLEMA

In un campo di gara, sufficientemente ampio, il robot è nella casella [9,5] con orientamento verso l’alto; deve eseguire il percorso descritto dalla seguente lista di comandi

[o,f,f,a,f,o,f,a,a,f,o,f]

Trovare l’ascissa X e l’ordinata Y della casella in cui finisce il percorso del robot.

X	
Y	

SOLUZIONE

X	11
---	----

Y 7

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

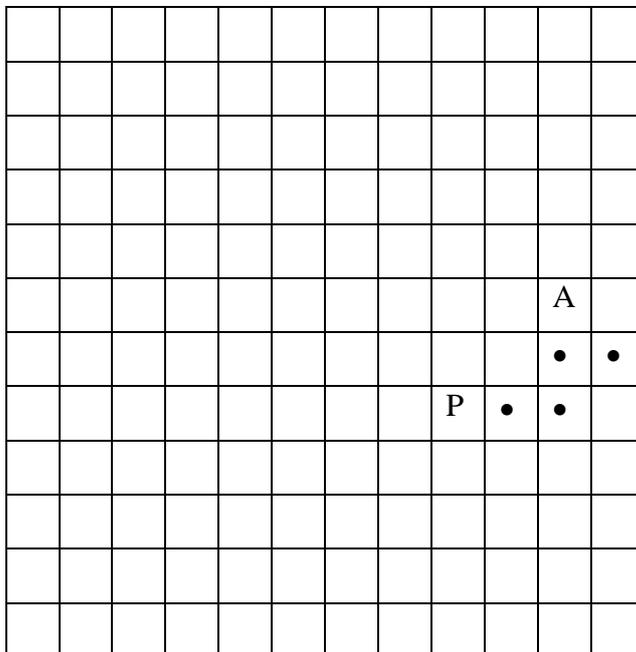
La soluzione si costruisce eseguendo uno dopo l'altro i comandi della lista.

Programma: [o,f,f,a,f,o,f,a,a,f,o,f].

Stati successivi del robot:

partenza	[9,5,N]
1 passo o	[9,5,E]
2 passo f	[10,5,E]
3 passo f	[11,5,E]
4 passo a	[11,5,N]
5 passo f	[11,6,N]
6 passo o	[11,6,E]
7 passo f	[12,6,E]
8 passo a	[12,6,N]
9 passo a	[12,6,O]
10 passo f	[11,6,O]
11 passo o	[11,6,N]
12 passo f	[11,7,N]

L'insieme delle caselle successivamente occupate è mostrata nella seguente figura (P indica la partenza, A l'arrivo): [(9,5), (10,5), (11,5), (11,6), (12,6), (11,6), (11,7)].



ESERCIZIO 3

PROBLEMA

In un campo di gara un robot può muoversi come specificato nell'esercizio precedente. Il robot è nella casella [9,9] con orientamento verso destra (si può dire che è nello stato [9,9,E]).

Trovare la lista L dei comandi da assegnare al robot per fargli compiere il percorso descritto dalla seguente lista di caselle

[ (9,9), (10,9), (11,9), (10,9), (9,9), (9,8), (9,9), (9,10) ].

N.B. Le due liste di comandi [o,o] e [a,a] hanno lo stesso effetto (quello di far ruotare il robot di 180 gradi): preferire la prima.

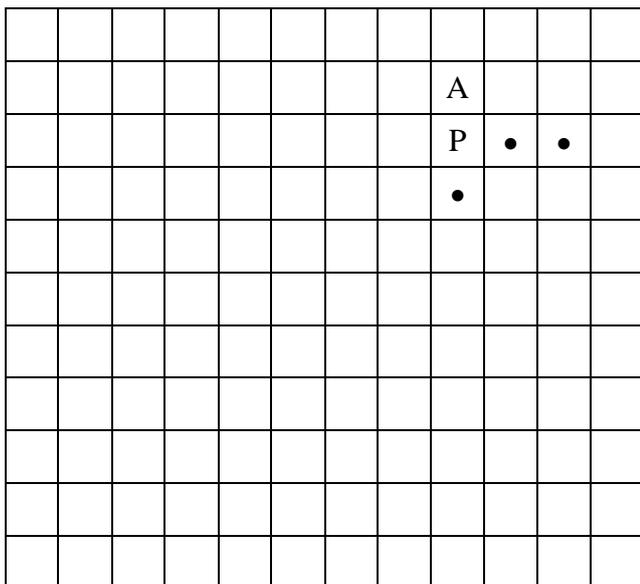
L

SOLUZIONE

L

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Per risolvere con facilità il problema è conveniente visualizzare il percorso, come nella figura che segue.



Dalla figura è immediato che la sequenza di comandi relativa al percorso è la seguente:

STATO DEL ROBOT	CONSEGUENZA DEL COMANDO
[9,9,E]	partenza
[10,9,E]	f
[11,9,E]	f
[11,9,S]	o
[11,9,O]	o
[10,9,O]	f
[9,9,O]	f
[9,9,S]	a



[9,8,S]	f
[9,8,O]	o
[9,8,N]	o
[9,9,N]	f
[9,10,N]	f

Quindi la lista dei comandi cercata è: [f,f,o,o,f,f,a,f,o,o,f,f].

## ESERCIZIO 4

### PREMESSA

Leggere il seguente testo con attenzione.

#### *L'UNIONE EUROPEA*

*L'Italia, insieme con altri Paesi europei, fa parte dell'Unione Europea. Questa istituzione riunisce vari Stati del nostro continente.*

*Questi Paesi sono retti da governi democratici e si sono riuniti per collaborare ad alcuni scopi comuni: il mantenimento della pace e il progresso sociale ed economico dei Paesi che vi partecipano.*

*L'Unione Europea è un organismo sovranazionale: gli Stati che la compongono, cioè, restano indipendenti l'uno dagli altri, ma si accordano tra loro per prendere decisioni comuni su alcuni aspetti di carattere generale, che riguardano tutto il continente: per esempio, la circolazione delle merci, i provvedimenti per migliorare le condizioni di vita nei Paesi più poveri, le leggi che tutelano l'ambiente.*

*La storia del continente europeo, fino alla metà del secolo scorso, fu caratterizzata da guerre distruttive, che provocavano conseguenze gravissime per la popolazione. L'idea di riunire i Paesi europei nacque proprio verso la metà del secolo scorso, per porre fine alle guerre, rendere stabile la pace nel continente e favorire lo sviluppo degli Stati.*

*La prima istituzione europea fu il Mercato Comune Europeo, cioè un'area in cui alcune merci potevano circolare liberamente che riuniva solo 6 stati: il Belgio, la Germania, la Francia, l'Italia, il Lussemburgo e i Paesi Bassi.*

*In seguito gli accordi si allargarono e, poco alla volta, nuove nazioni entrarono a far parte dell'Unione Europea.*

*Dal 2013 essa è formata da 28 stati e, oltre al commercio e all'economia delle nazioni che ne fanno parte, si occupa anche di garantire la libertà e la sicurezza dei loro cittadini, di promuovere la creazione di posti di lavoro e di preservare l'ambiente.*

Tratto da, *Discovery, Avventura dei saperi, Storia, 2009, Pearson, Paravia Bruno Mondadori spa*

### PROBLEMA

Rispondere alle seguenti domande numerate, riportando nella successiva tabella la lettera maiuscola (senza punto) corrispondente alla risposta ritenuta corretta.

1. Rispetto alla prima istituzione europea:
  - A. Il numero degli stati partecipanti all'Unione è rimasto invariato;
  - B. Il numero degli stati partecipanti all'Unione si è più che quadruplicato;
  - C. Il numero degli stati partecipanti è raddoppiato;
  - D. Due degli stati partecipanti a quella prima istituzione, non fanno più parte dell'Unione Europea.
2. Una delle condizioni che permette di fare parte dell'Unione Europea, secondo il testo appena letto, risiede nel fatto che
  - A. Uno stato deve avere un governo sovranazionale eletto liberamente dai suoi cittadini;
  - B. Uno stato non deve presentare una situazione economica con debiti;
  - C. Uno stato deve avere un ampio mercato per la circolazione delle merci;
  - D. Uno stato deve garantire ad ogni suo cittadino, la partecipazione alla gestione del potere pubblico in piena libertà.
3. Le decisioni che l'Unione può prendere hanno queste caratteristiche:
  - A. Devono essere collegiali, devono riguardare aspetti complessivi e devono essere utili a tutto il continente;

- B. Devono essere comuni, devono riguardare aspetti economici e devono essere utili alla maggior parte degli Stati coinvolti;
- C. Devono essere comuni, devono riguardare eventi drammatici (guerre, conflitti) e hanno come finalità il mantenimento della pace nel Continente.
- D. Devono essere comuni, devono riguardare aspetti specifici e devono essere utili a tutto il Continente.
4. L'Unione Europea, secondo il testo appena letto, nacque anche come conseguenza:
- A. Della Prima Guerra Mondiale perché, dopo questo tremendo conflitto, si cercò di garantire la stabilità e la pace al Continente;
- B. Della Seconda Guerra Mondiale perché, dopo questo tremendo conflitto, si cercò una cooperazione tra le nazioni europee;
- C. Delle tensioni commerciali tra le varie nazioni che non rispettavano le leggi di mercato e alzavano i prezzi in modo esagerato, soprattutto quelli dei carburanti;
- D. Della Seconda Guerra Mondiale perché, dopo questo tremendo conflitto, gli USA si fecero promotori della pace e della cooperazione.
5. Il primo nucleo della Comunità Europea fu un'unione di tipo:
- A. Politico;
- B. Sociale;
- C. Militare;
- D. Economico.
6. L'Unione Europea, secondo il testo appena letto, potrebbe prendere in considerazione
- A. Una proposta che riguarda il calendario scolastico della scuola in Italia;
- B. Una legge che riguarda la percentuale di guadagno che un'azienda che installa pannelli solari potrebbe ottenere dalla vendita di essi;
- C. Una proposta che riguarda l'aumento o la diminuzione delle tasse in Italia;
- D. Una legge che potrebbe riguardare la riduzione delle percentuali di emissioni di anidride carbonica entro una certa data.
7. Secondo il testo appena letto, oltre ad occuparsi di sviluppo, commercio, ambiente ecc. l'Unione Europea è, sempre di più, impegnata:
- A. Nel garantire il rispetto dei diritti umani a tutti i suoi cittadini;
- B. Nel mantenimento delle tradizioni popolari di tutti i suoi cittadini;
- C. Nel controllo delle frontiere tra Paese e Paese per regolare i flussi migratori europei;
- D. Nell'organizzare i corpi di controllo come polizia e carabinieri, per garantire la sicurezza sul territorio nazionale.

DOMANDA	RISPOSTA
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

**SOLUZIONE**

DOMANDA	RISPOSTA
1	B
2	D

3	A
4	B
5	D
6	D
7	A

### COMMENTI ALLA SOLUZIONE

1. Nel testo si dice che la prima idea di Unione Europea (MEC) riuniva 6 Paesi, mentre oggi i Paesi partecipanti all'Unione Europea sono 28: quindi i Paesi sono più che quadruplicati (risposta corretta B).
2. Nel testo viene specificato che *“Questi Paesi sono retti da governi democratici”*: democratico significa che tali stati devono possedere una forma di governo che si basa sulla sovranità popolare e che garantisce a ogni cittadino la partecipazione in piena uguaglianza all'esercizio del potere pubblico (risposta corretta D). Le altre risposte contengono informazioni errate.
3. Il testo cita tre qualità caratteristiche delle decisioni che l'Unione Europea prende. Tali decisioni devono essere *“comuni su alcuni aspetti di carattere generale, che riguardano tutto il continente”*: collegiale è sinonimo di comune, complessivo è sinonimo di generale (risposta corretta A). Le altre risposte contengono verità parziali o errate: nella risposta B (errata) si parla di decisioni che riguardano solo gli aspetti economici, nella risposta C (errata) di eventi drammatici e nella risposta D (errata), invece di carattere generale, si parla di specificità.
4. Il testo cita *“La storia del continente europeo, fino alla metà del secolo scorso, fu caratterizzata da guerre distruttive, che provocavano conseguenze gravissime per la popolazione. L'idea di riunire i Paesi europei nacque proprio verso la metà del secolo scorso, per porre fine alle guerre, rendere stabile la pace nel continente e favorire lo sviluppo degli Stati.”* Si parla delle guerre del Novecento, ma si dice che l'idea dell'Unione nacque verso la metà del secolo scorso, quindi in concomitanza con lo svolgimento e la fine del secondo conflitto mondiale (1939 - 1945). Una veloce ricerca sui primi trattati circa la cooperazione tra stati europei, mostra che i Trattati di Roma sono del 1957 (metà del Novecento). La risposta D è errata perché gli USA non fanno parte dell'Unione Europea.
5. Il testo cita: *“La prima istituzione europea fu il Mercato Comune Europeo, cioè un'area in cui alcune merci potevano circolare liberamente che riuniva solo 6 stati: il Belgio, la Germania, la Francia, l'Italia, il Lussemburgo e i Paesi Bassi.”* Il MEC era, dunque, un'unione di tipo economico/commerciale (risposta corretta D), non politica, non sociale, non militare (risposte B, C e D errate).
6. Nel testo si dice che le decisioni che l'Unione Europea prende devono essere *generali* e, in due diversi passaggi, si dice che possono coinvolgere *la salvaguardia e la tutela dell'ambiente*. Quindi la risposta D (corretta) ha queste caratteristiche. Le altre tre risposte riguardano aspetti specifici dell'Italia e quindi non sono decisioni che possono essere prese in considerazione dall'Unione Europea, ma che riguardano aspetti specifici del nostro Paese, regolati dalle leggi dello Stato o delle Regioni.
7. Nella parte finale del testo si dice che *“Dal 2013 essa è formata da 28 stati e, oltre al commercio e all'economia delle nazioni che ne fanno parte, si occupa anche di garantire la libertà e la sicurezza dei loro cittadini, di promuovere la creazione di posti di lavoro e di preservare l'ambiente.”* Libertà e sicurezza sono due *diritti umani*, che appartengono appunto a tutti gli uomini e cittadini, quindi la risposta corretta è la A. Le tradizioni popolari e il loro mantenimento non rientrano tra gli impegni dell'Unione, le frontiere si sono aperte ed allargate e non restringono i flussi migratori e le decisioni che riguardano la sicurezza dei corpi di polizia di un Paese spettano al singolo stato e non alle decisioni continentali.

ESERCIZIO 5

PROBLEMA

In un deposito di minerali esistono esemplari di vario peso e valore individuati da sigle di riconoscimento. Ciascun minerale è descritto da un *termine* che contiene le seguenti informazioni:

deposito(<sigla del minerale>, <valore in euro>, <peso in Kg>).

Il deposito contiene i seguenti minerali:

deposito(m1,29,36)    deposito(m2,28,37)    deposito(m3,25,38)  
 deposito(m4,26,36)    deposito(m5,27,36)

Disponendo di un piccolo motocarro con portata massima di 72 Kg trovare la lista L delle sigle di due minerali diversi che siano trasportabili contemporaneamente con questo mezzo e che abbiano il massimo valore complessivo; calcolare inoltre questo valore V1.

Se la portata fosse di 75 Kg, quale sarebbe il massimo valore V2 trasportabile?

N.B. Nella lista, elencare le sigle in ordine (lessicale) crescente; per le sigle usate si ha il seguente ordine:  $m1 < m2 < m3 < \dots$

L	
V1	
V2	

SOLUZIONE

L	[m1,m5]
V1	56
V2	57

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Una maniera (valida in generale) di risolvere il problema consiste nel costruire *tutte* le possibili *combinazioni* di due minerali diversi e considerare di ciascuna il valore e il peso.

N.B. Le *combinazioni* corrispondono ai sottoinsiemi: cioè sono indipendenti dall'ordine; per esempio la combinazione “m1, m4” è uguale alla combinazione “m4, m1”. Quindi per elencarle tutte (una sola volta) conviene costruirle sotto forma di liste i cui elementi sono ordinati, come richiesto dal problema: si veda di seguito.

Costruite le combinazioni occorre individuare quelle trasportabili e tra queste scegliere quella di maggior valore.

COMBINAZIONI	VALORE	PESO	TRASPORTABILITÀ	
			COL I MOTOC.	COL II MOTOC.
[m1,m2]	$29+28=57$	$36+37=73$	no	si
[m1,m3]	$29+25=54$	$36+38=74$	no	si
[m1,m4]	$29+26=55$	$36+36=72$	si	si
[m1,m5]	$29+27=56$	$36+36=72$	si	si
[m2,m3]	$28+25=53$	$37+38=75$	no	si
[m2,m4]	$28+26=54$	$37+36=73$	no	si
[m2,m5]	$28+27=55$	$37+36=73$	no	si
[m3,m4]	$25+26=51$	$38+36=74$	no	si
[m3,m5]	$25+27=52$	$38+36=74$	no	si
[m4,m5]	$26+27=53$	$36+36=72$	si	si

Dal precedente prospetto la soluzione si deduce facilmente.

N.B. Per costruire *tutte* le combinazioni di due sigle, conviene considerare esplicitamente le sigle elencate in un qualche ordine: per *esempio in quello alfabetico*:

m1  
m2  
m3  
m4  
m5

Adesso è facile costruire prima tutte le combinazioni di due sigle che iniziano con la “prima” (che sarà accoppiata con ciascuna delle successive), poi tutte quelle che iniziano con la “seconda” (che sarà accoppiata con ciascuna delle successive, e non con la precedente), e così via, in modo da essere sicuri di averle considerate tutte e una sola volta.

N.B. In casi particolari si può fare di meglio che costruire ed esaminare tutte le combinazioni. In *questo caso*, si possono elencare le sigle dei minerali in ordine *crescente di peso*:

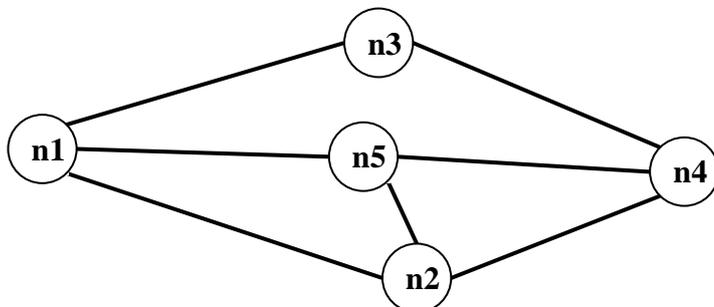
m1 36  
m4 36  
m5 36  
m2 37  
m3 38

Da questo elenco è facile vedere che solo le combinazioni (di due elementi scelte) tra i primi tre sono trasportabili col primo motocarro: cioè bisogna esaminare solo tre combinazioni; inoltre è immediato che qualunque combinazione (di due elementi) è trasportabile col secondo autocarro: quindi basta scegliere la coppia di minerali di maggior valore.

ESERCIZIO 6

PREMESSA

Il seguente *grafo* descrive i collegamenti esistenti fra 5 città: queste sono rappresentate da *nodi* di nome n1, n2, ..., n5 e i collegamenti sono rappresentati da segmenti, detti *archi*, tra nodi.



Questo grafo può essere descritto da un elenco di termini, ciascuno dei quali definisce un arco tra due nodi del grafo con la indicazione della relativa distanza in chilometri:

- arco(n1,n2,6)                      arco(n1,n3,5)                      arco(n3,n4,4)
- arco(n1,n5,3)                      arco(n2,n4,3)                      arco(n2,n5,2)
- arco(n5,n4,6)

Un *percorso* tra due nodi del grafo può essere descritto con la lista di archi che lo compongono ordinati dal nodo di partenza al nodo di arrivo. Per esempio, la lista [n5,n2,n4,n3] descrive un percorso dal nodo n5 al nodo n3; tale percorso ha lunghezza  $K = 2 + 3 + 4 = 9$ .

PROBLEMA

È dato un grafo descritto dal seguente elenco di archi:

- arco(n1,n2,7)                      arco(n1,n3,6)                      arco(n1,n6,1)                      arco(n2,n3,1)
- arco(n3,n5,1)                      arco(n4,n3,1)                      arco(n4,n5,1)                      arco(n6,n5,4)

Disegnare il grafo e trovare:

1. la lista L1 del percorso più breve tra n6 e n2 e calcolarne la lunghezza K1;
2. la lista L2 del percorso *semplice* (cioè senza nodo ripetuti) più lungo tra n6 e n2 e calcolarne la lunghezza K2.
3. La lista L3 del percorso semplice tra n6 e n2 di lunghezza 7.

L1	
K1	
L2	
K2	
L3	

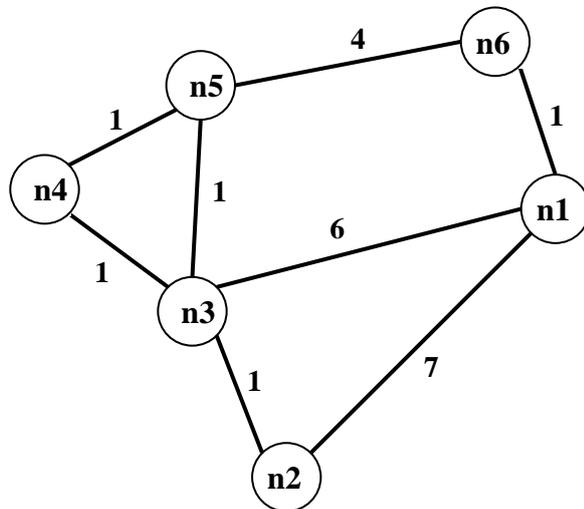
SOLUZIONE

L1	[n6, n5, n3, n2]
K1	6
L2	[n6, n5, n4, n3, n1, n2]
K2	19
L3	[n6, n5, n4, n3, n2]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Per disegnare il grafo si osservi innanzitutto che vengono menzionati 6 nodi (n1, n2, n3, n4, n5, n6); si procede per tentativi: si disegnano i 6 punti nel piano e li si collega con archi rettilinei; probabil-

mente al primo tentativo gli archi si incrociano; si cerca poi di risistemare i punti in modo da evitare gli incroci degli archi: spesso questo si può fare in più modi. Da ultimo si riportano le distanze sugli archi, come mostrato dalla figura seguente.



Si noti che le lunghezze degli archi che compaiono nei termini (che rappresentano delle strade) *non* sono (necessariamente) proporzionali a quelle degli archi del grafo (che sono, segmenti di retta). Per rispondere alle due domande occorre elencare sistematicamente *tutti* i percorsi, che non passino più volte per uno stesso punto, tra n6 e n2.

PERCORSO da n6 a n2	LUNGHEZZA
[n6, n1, n2]	8
[n6, n1, n3, n2]	8
[n6, n5, n3, n2]	6
[n6, n5, n3, n1, n2]	18
[n6, n5, n4, n3, n2]	7
[n6, n5, n4, n3, n1, n2]	19

L1, K1, L2, K2, L3 seguono immediatamente.

ESERCIZIO 7

PROBLEMA

Alcuni ragazzi decidono di costruire un ipertesto multimediale sugli avvenimenti turistici significativi della loro regione per la prossima primavera. Per organizzare il progetto, dividono il lavoro in singole attività, stabiliscono quanti di loro devono partecipare a ogni attività e stimano il tempo per portarla a conclusione.

(Esempi di attività sono: la raccolta delle manifestazioni dai vari enti che le organizzano, il disegno della struttura dell'ipertesto, la decisione su quali sono le interazioni possibili, il test finale per controllare che tutto funzioni, ecc.)

La tabella che segue elenca le attività (indicate rispettivamente con le sigle A1, A2, A3, ...), riportando per ciascuna di esse il numero di ragazzi assegnato e il numero di giorni necessari per completarla.

ATTIVITÀ	RAGAZZI	GIORNI
A1	4	2
A2	3	3
A3	2	2
A4	2	2
A5	3	2
A6	2	2
A7	3	2
A8	2	2
A9	2	3
A10	3	3
A11	5	1

N.B. Ai fini del problema non è importante conoscere la descrizione delle singole attività.

Le attività non possono essere svolte in un ordine qualsiasi: esistono delle *priorità* fra le attività che sono descritte con coppie di sigle; ogni coppia esprime il fatto che l'attività associata alla sigla di destra (detta successiva) può iniziare solo quando l'attività associata alla sigla di sinistra (detta precedente) è terminata. Ovviamente se una attività ha più precedenti, può iniziare solo quando tutte le precedenti sono terminate.

In questo caso le priorità sono:

[A1,A2], [A1,A4], [A1,A3], [A2,A5], [A1,A9], [A3,A6], [A6,A7],  
[A4,A8], [A8,A7], [A5,A11], [A9,A10], [A10,A11], [A7,A11]

Trovare il numero N di giorni necessari per completare il progetto, tenuto presente che alcune attività possono essere svolte in parallelo e che ogni attività *deve* iniziare prima possibile (nel rispetto delle priorità). Inoltre, trovare il numero GM del giorno (contando come 1 il giorno di inizio del progetto) in cui lavora il numero massimo RM di ragazzi.

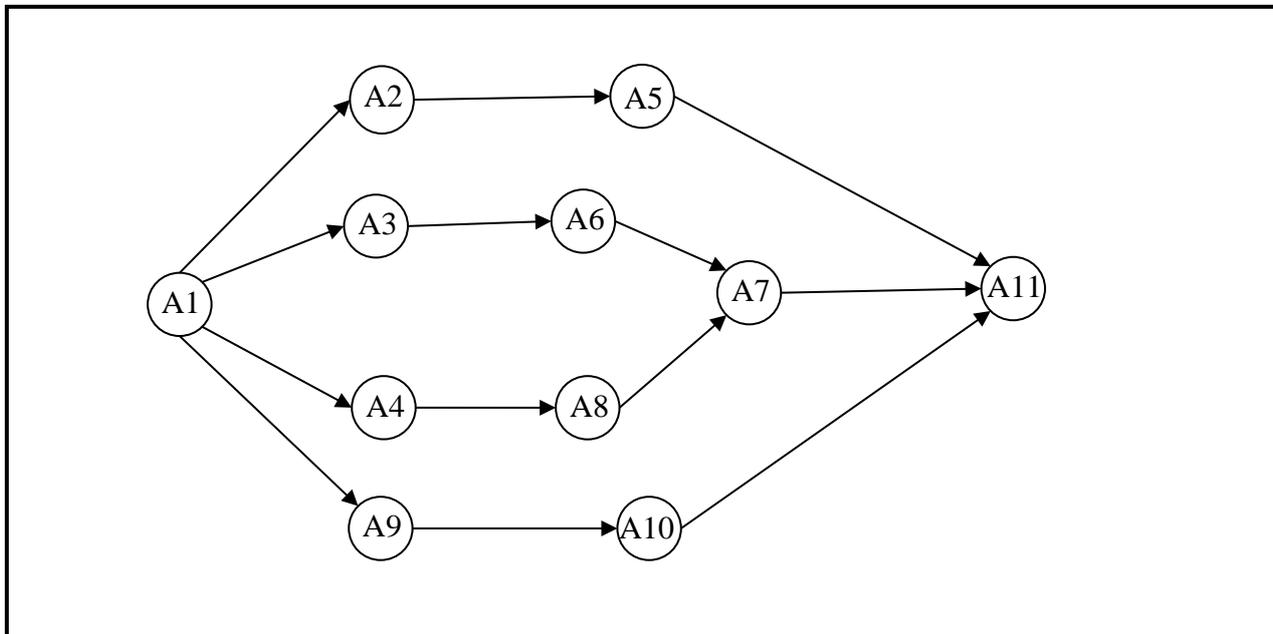
N	
GM	
RM	

SOLUZIONE

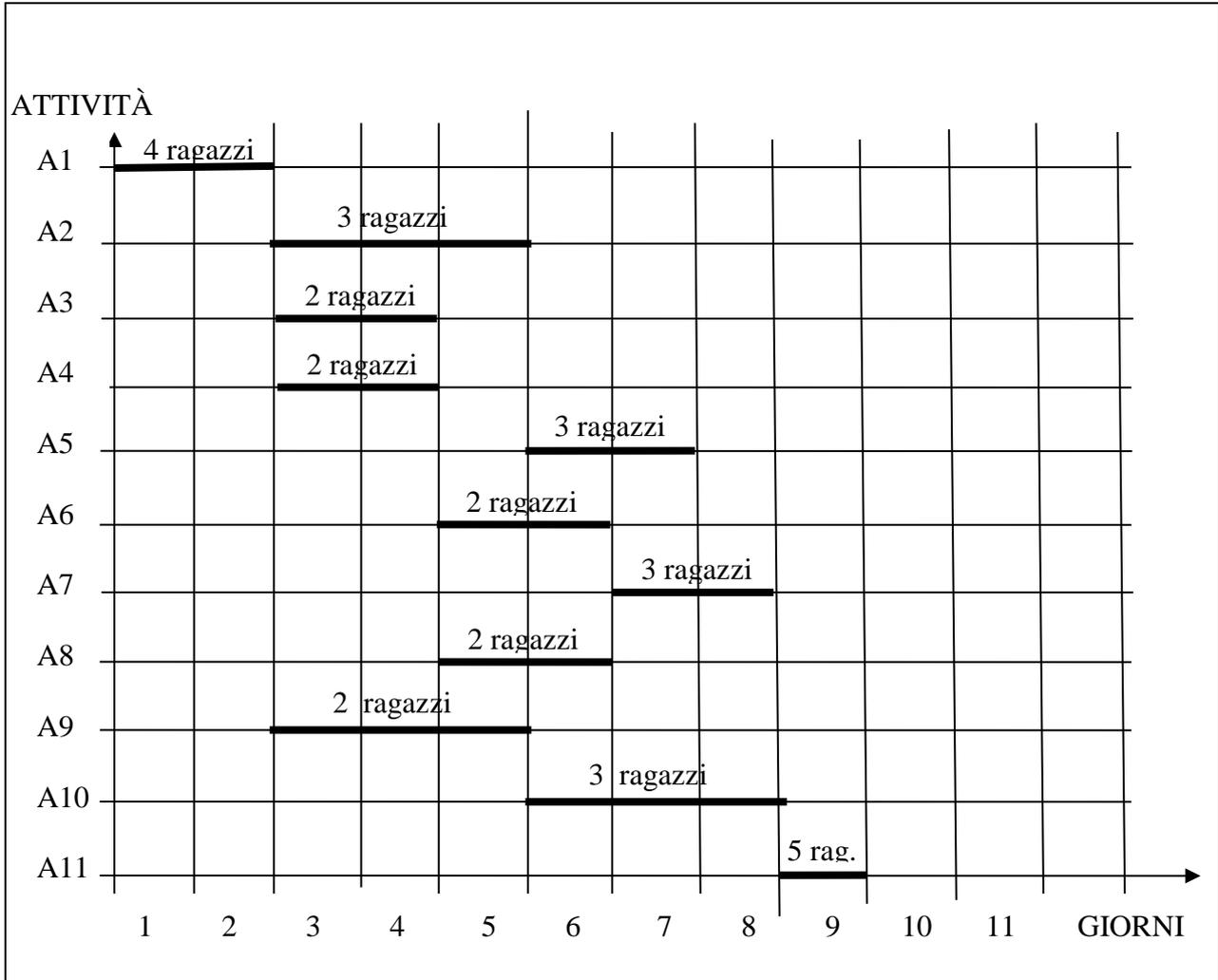
N	9
GM	6
RM	10

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Per prima cosa, dai dati sulle priorità occorre disegnare il *diagramma delle precedenze*, cioè il grafo che ha come nodi le attività e come frecce le precedenze: indica visivamente la dipendenza “logica” tra le attività, cioè come si devono susseguire nel tempo.



Poi, dal grafo e dalla tabella che descrive le attività, si può compilare il diagramma di Gantt; questo riporta sull’asse verticale le attività (dall’alto verso il basso), sugli assi orizzontali il tempo, in questo caso misurato in giorni. Su ogni asse orizzontale (parallelo a quello dei tempi e in corrispondenza a una attività) è sistemato un segmento che indica l’inizio e la durata della corrispondente attività (e il numero di ragazzi che devono svolgerla). L’attività A1 inizia (*convenzionalmente*) il giorno 1 e dura due giorni; quando è terminata, il giorno 3 possono iniziare le attività A2, A3, A4 e A9 (che quindi si svolgono parzialmente in parallelo). Inoltre, per esempio, l’attività A7 può iniziare solamente quando sono terminate sia l’attività A8 sia l’attività A6.



Dal Gantt si vede che il progetto dura 9 giorni e che il numero *massimo* di ragazzi al lavoro contemporaneamente è 10, il giorno 6.

ESERCIZIO 8

PROBLEMA

Si consideri la seguente procedura.

```

procedura PROVA1;
variables A, B, C, D integer;
input A, B, C, D;
A ← A + B - C + D;
B ← A - B + C + D;
C ← A + B + C + D;
D ← A + B + C - D;
output A, B, C, D;
endprocedura;
    
```

I valori in input sono: 7 per A, 3 per B, 1 per C e 9 per D; determinare i valori di output e scriverli nella seguente tabella.

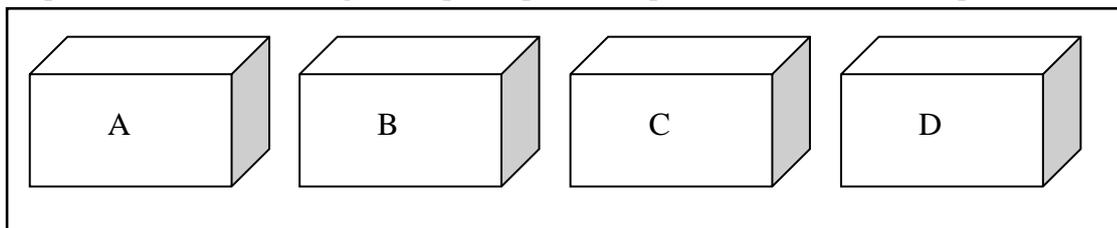
A	
B	
C	
D	

SOLUZIONE

A	18
B	25
C	53
D	87

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Immaginando che le variabili siano “scatole” che contengono un valore (come nella figura seguente), il problema si risolve eseguendo passo passo le operazioni indicate dalla procedura.



Occorre fare attenzione al fatto che il valore delle variabili può cambiare più volte, nel corso della procedura.

ESERCIZIO 9

PROBLEMA

Si consideri la seguente procedura.

```

procedure PROVA2;
variables A, B, C, D, E integer;
input A, B, C;
D ← A + B + C;
E ← A + B + C + D;
if C > D
    then C ← A;
    else if D > C then C ← E;
endif;
A ← C;
C ← A;
B ← D;
D ← B;
output A, B, C, D;
endprocedure;
    
```

I valori in input sono: 8 per A, 7 per B e 5 per C; determinare i valori di output e scriverli nella seguente tabella.

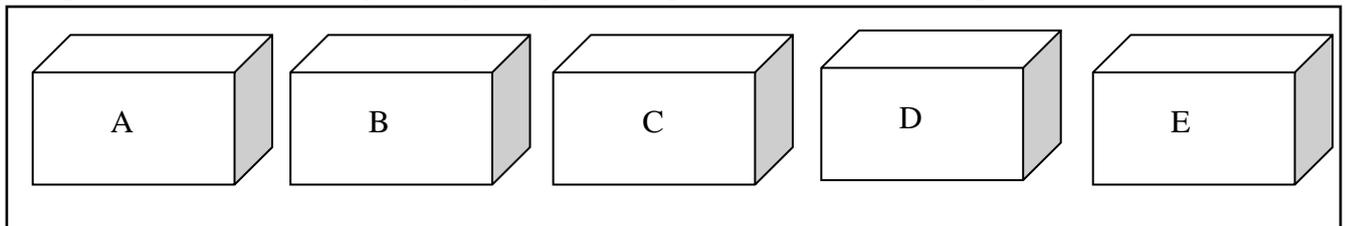
A	
B	
C	
D	

SOLUZIONE

A	40
B	20
C	40
D	20

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Immaginando che le variabili siano “scatole” che contengono un valore (come nella figura seguente), il problema si risolve eseguendo passo passo le operazioni indicate dalla procedura.



Occorre fare attenzione al fatto che il valore delle variabili può cambiare più volte, nel corso della procedura.

**ESERCIZIO 10**

**PROBLEMA**

Si consideri la seguente procedura.

```

procedura PROVA1;
variables A, B, C, D integer;
input A, B, C;
A ← A + B + C;
B ← A + B + C;
if A>B
    then C ← A;
    else A ← B;
endif;
C ← A + B + C;
C ← A + B + C;
D ← A + B + C;
output A, B, C, D;
endprocedura;
    
```

I valori in input sono: 4 per A, 6 per B e 8 per C; determinare i valori di output e scriverli nella seguente tabella.

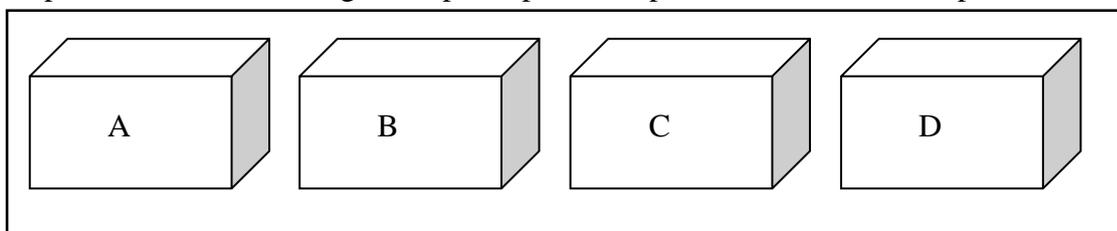
A	
B	
C	
D	

**SOLUZIONE**

A	32
B	32
C	136
D	200

**COMMENTI ALLA SOLUZIONE**

Immaginando che le variabili siano “scatole” che contengono un valore (come nella figura seguente), il problema si risolve eseguendo passo passo le operazioni indicate dalla procedura.

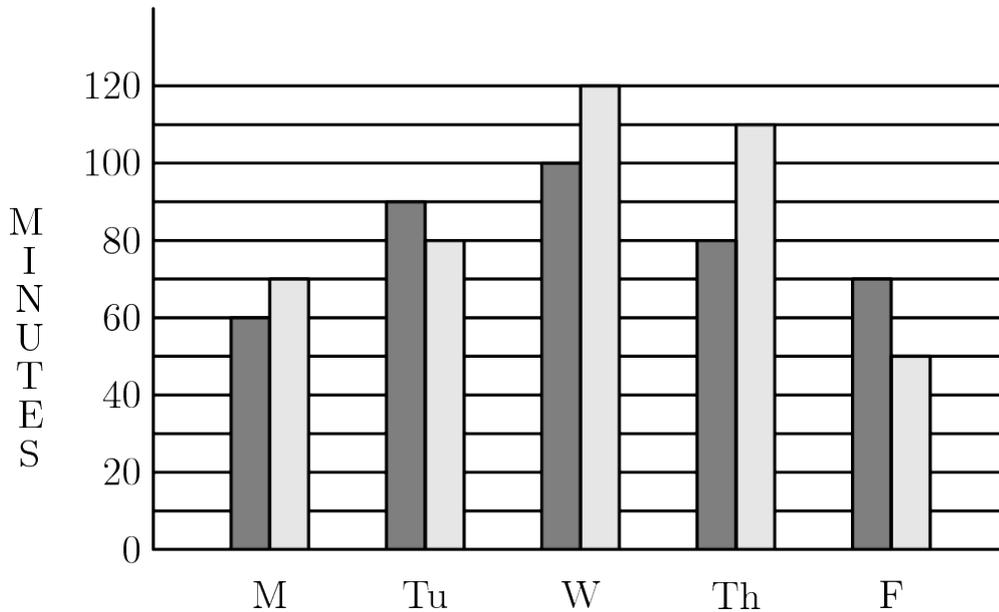


Occorre fare attenzione al fatto che il valore delle variabili può cambiare più volte, nel corso della procedura.

ESERCIZIO 11

PROBLEMA

The following graph shows the minutes studied by John (black bars) and Jane (grey bars) each day of a certain week. On the *average*, how many minutes per day did Jane study more than John? Put your answer, as an integer number (truncated if needed), in the box under the graph.



average minutes per day	
-------------------------	--

SOLUZIONE

average minutes per day	6
-------------------------	---

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Jane studied 10 min more on Monday, 10 min less on Tuesday, 20 min more on Wednesday, 30 min more on Thursday and 20 min less on Friday. She studied a total of  $10 - 10 + 20 + 30 - 20 = 30$  minutes more than John, that week. Therefore, she spent an average of  $(30 \text{ minutes}) / (5 \text{ days}) = 6$  minutes per day more than John did.

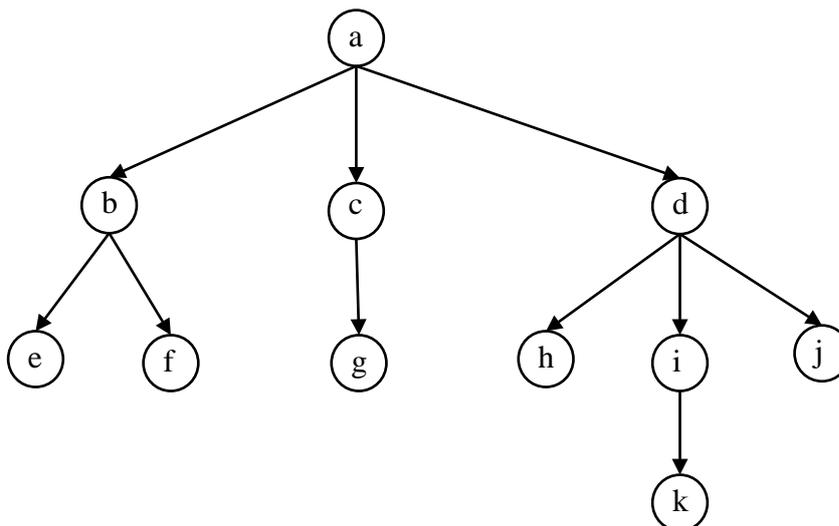
ESERCIZIO 12

PREMESSA

Un albero è un grafo orientato (cioè costituito da *nodi* e *frecce*) che ha la seguente proprietà: in ogni nodo, *tranne uno* (detto *radice*), “entra” una (sola) freccia.

Da ogni nodo possono “uscire” delle frecce; un nodo da cui non escono frecce si dice *foglia*.

Un esempio di albero (contenente i *nodi*: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k) è mostrato nella figura seguente.



Una freccia può essere descritta dal termine:

$$\text{arco}(\langle \text{padre} \rangle, \langle \text{figlio} \rangle)$$

dove  $\langle \text{padre} \rangle$  e  $\langle \text{figlio} \rangle$  sono (nomi di) nodi. Questa scrittura suggerisce di chiamare *padre* il nodo da cui esce una freccia e *figlio* il nodo in cui entra una freccia.

Un albero può, quindi, essere descritto da tutti i termini associati alle sue frecce.

L'albero sopra riportato può essere rappresentato dal seguente elenco di termini:

- |           |           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| arco(a,b) | arco(a,c) | arco(a,d) | arco(b,e) | arco(b,f) |
| arco(c,g) | arco(d,h) | arco(d,i) | arco(d,j) | arco(i,k) |

N.B. Dal disegno dell'albero è facile scrivere i termini che lo rappresentano; se sono dati i termini, per disegnare l'albero occorre:

- fare l'elenco dei nodi,
- trovare il nodo radice (l'*unico* che non compare come secondo argomento in nessun termine),
- disegnare la radice, determinare i suoi figli e disegnarli, poi i figli dei figli e così via.

Un albero può considerarsi un *albero genealogico* e desumere, tra i suoi nodi delle *parentele*, come, per esempio (nell'albero di figura):

- **b** e **d** sono *fratelli* (hanno lo stesso padre);
- **e** è *cugino* di **h** (il padre di **e** e il padre di **h** sono fratelli, oppure **e** e **h** hanno lo stesso nonno, ma non sono fratelli);
- **b** è *zio* di **g** (**b** è fratello del padre di **g**);
- **h** è *zio* (**h** ha un fratello con figli);
- **a**, **d** sono *nonni* (ciascuno ha un figlio che ha un figlio).

N.B. Si noti che si può dire **d** è *padre*, ma anche **d** è *padre di i*; analogamente **g** è *figlio* ma anche **g** è *figlio di c*; analoga situazione si verifica per altri gradi di parentela.

**PROBLEMA**

Disegnare l'albero genealogico descritto dal seguente insieme di termini e rispondere ai quesiti sotto riportati.

- arco(g,t)      arco(g,m)      arco(g,f)      arco(u,y)      arco(x,c)      arco(c,u)      arco(x,d)
- arco(b,z)      arco(d,e)      arco(d,b)      arco(d,g)      arco(b,a)      arco(c,h)      arco(u,p)

- Trovare il numero **N** complessivo di padri presenti in questo albero genealogico.
- Trovare il numero **M** complessivo di zii presenti in questo albero.
- Trovare la lista **L1** dei cugini di **h** (con gli elementi in ordine lessicografico).
- Trovare la lista **L2** dei cugini di **f** (con gli elementi in ordine lessicografico).

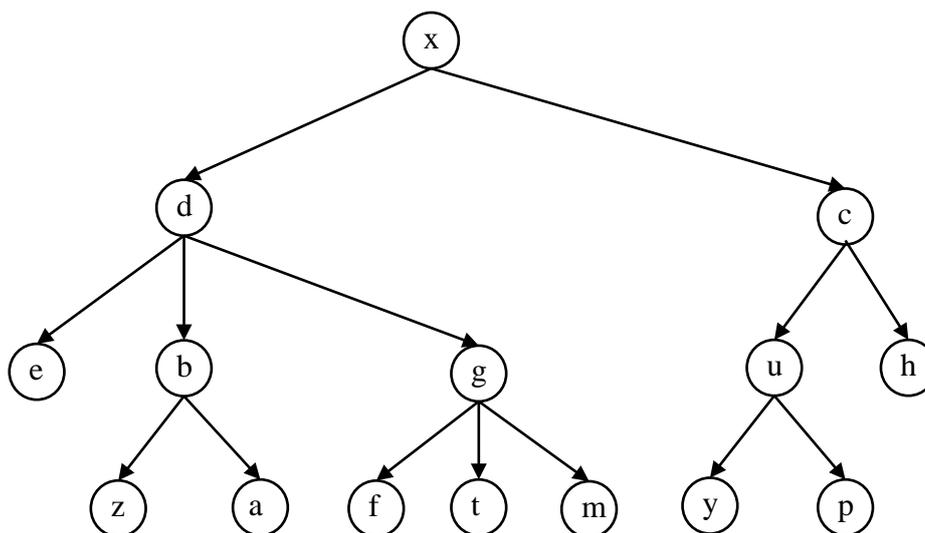
N	
M	
L1	
L2	

**SOLUZIONE**

N	6
M	6
L1	[b,e,g]
L2	[a,z]

**COMMENTI ALLA SOLUZIONE**

I nodi sono [g,t,m,f,u,y,x,c,d,b,z,e,a,h,p] in ordine di apparizione nei termini; la radice è **x**. Il disegno dell'albero è mostrato nella seguente figura.



I padri, cioè i nodi da cui parte (almeno) una freccia, sono [b,c,d,g,u,x]; gli zii, cioè i nodi che hanno (almeno) un fratello con (almeno) un figlio, sono [b,c,d,e,g,h]; i cugini di **h**, cioè i nodi che hanno lo stesso nonno di **h**, ma non sono fratelli di **h**, sono [b,e,g]; i cugini di **f** (cioè i nodi che hanno lo stesso nonno ma non sono fratelli) sono [a,z].