

GARA6 2017 SUPERIORI INDIVIDUALI

ESERCIZIO 1

Si faccia riferimento alla GUIDA - OPS 2017, problema ricorrente REGOLE E DEDUZIONI.

PROBLEMA

Siano date le seguenti regole:

regola(1,[a,b],e)	regola(2,[d,e,h],a)	regola(3,[n],e)	regola(4,[f,h,k],c)
regola(5,[t,b],u)	regola(6,[p,h],d)	regola(7,[a,b],f)	regola(8,[u],m)
regola(9,[u,m,t],d)	regola(10,[g],h)	regola(11,[r,a],t)	regola(12,[n],p)
regola(13,[a,b,f],g)	regola(14,[a,b],r)	regola(15,[f,g],k)	regola(16,[h,k],n)

Trovare:

1. la lista L1 che descrive il procedimento per dedurre **a** a partire da **h, k**;
2. la lista L2 che descrive il procedimento per dedurre **c** a partire da **a, b**;
3. la lista L3 che descrive il procedimento per dedurre **d** con la regola 6 a partire da **a, b**;
4. la lista L4 che descrive il procedimento per dedurre **d** con la regola 9 a partire da **a, b**;

N.B. Se nel corso del procedimento sono applicabili contemporaneamente più regole, nella lista che lo rappresenta occorre dare la precedenza alla regola con la sigla minore.

L1	[]
L2	[]
L3	[]
L4	[]

SOLUZIONE

L1	[16,3,12,6,2]
L2	[7,13,10,15,4]
L3	[7,13,10,15,16,12,6]
L4	[14,11,5,8,9]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Per risolvere questo tipo di problemi si può usare il metodo *backward* (o *top down*) che consiste nel partire dalla incognita e cercare di individuare una regola per derivarla. Se esiste una regola i cui antecedenti sono tutti noti (i dati) la soluzione è trovata; altrimenti si cerca una regola i cui antecedenti non sono tutti noti e si continua a cercare regole per derivare gli antecedenti incogniti (che compaiono nella premessa).

Per la prima domanda, **a** è deducibile solo con la regola 2, da **d, e** e **h** (i primi due incogniti, il terzo dato). L'elemento **d** è deducibile con le regole 6 da **p** e **h** (il primo incognito, il secondo dato) e con la regola 9 da **u, m** e **t** (tutti incogniti). Per ovvi motivi conviene provare prima con la regola 6; l'elemento **p** è deducibile solo con la regola 12 da **n** (incognito). L'elemento **n** è deducibile solo con la regola 16 da **h** e **k** (entrambi dati). L'elemento **e** è deducibile con la regola 1 da **a** e **b** (entrambi incogniti, e il secondo non deducibile) e con la regola 3 da **n** (appena dedotto). Particolare attenzione deve essere posta a scrivere correttamente il procedimento.

Questo può essere fatto con uno schema come la seguente tabella, che mette in evidenza la sigla della regola e i suoi antecedenti, l'elemento dedotto con quella regola (nella casella immediatamente in basso) e gli elementi che sono noti al momento dell'applicazione (nella riga in basso, nelle caselle a sinistra della colonna in cui compare la regola).

		REGOLE VIA VIA APPLICATE							
		16 [h,k]	3 [n]	12 [n]	6[p,h]	2 [d,e,h]			
h	k	n	e	p	d	a			
DATI		INCOGNITE VIA VIA DEDOTTE							

Il procedimento è [16,3,12,6,2]. Dopo la regola 16 sono applicabili sia la regola 12 sia le regola 3: naturalmente occorre dare la precedenza a quest'ultima.

Perché la soluzione sia unica occorre controllare che la regola 9, per dedurre **d** non vada a buon fine; infatti ciò è vero perché **u** è deducibile solo con la regola 5 che ha **b** (non dato e non deducibile) tra gli antecedenti.

Per la seconda domanda **c** è deducibile solo con la regola 4 da **f**, **h** e **k** (tutti incogniti). L'elemento **f** è deducibile solo con la regola 7 da **a** e **b** (entrambi dati). L'elemento **h** è deducibile solo con la regola 10 da **g** (incognito). L'elemento **g** è deducibile solo con la regola 13 da **a**, **b**, **f** (i primi due dati, il terzo già dedotto). L'elemento **k** è deducibile solo con la regola 15 da **f** e **g** (entrambi già dedotti). Il procedimento è [7,13,10,15,4].

Per la terza domanda **d** deve essere dedotto con la regola 6 che richiede **p** ed **h** (entrambi incogniti). L'elemento **p** è deducibile solo con la regola 12 da **n** (incognito). L'elemento **n** è deducibile solo con la regola 16 da **h** e **k** (entrambi incogniti). Il lavoro per dedurre **h**, **k**, e il necessario **f**, è già stato fatto per rispondere alla precedente domanda e può, quindi, essere riutilizzato. In definitiva, il procedimento è [7,13,10,15,16,12,6]. Per un procedimento così lungo è bene controllare la corretta sequenza delle regole con la solita tabella:

		REGOLE VIA VIA APPLICATE							
		7 [a,b]	13 [a,b,f]	10 [g]	15[f,g]	16 [h,k]	12[n]	6[p,h]	
a	b	f	g	h	k	n	p	d	
DATI		INCOGNITE VIA VIA DEDOTTE							

Si vede che le regole 10 e 15, che potrebbero essere scambiate, sono applicate nella giusta sequenza.

Per la quarta domanda **d** deve essere dedotto con la regola 9 che richiede **u**, **m** e **t** (tutti incogniti). L'elemento **u** è deducibile solo con la regola 5 da **t** e **b** (il primo incognito già da dedurre, il secondo, stavolta, dato). L'elemento **t** è deducibile solo con la regola 11 da **r** ed **a** (il primo incognito, il secondo dato). L'elemento **r** è deducibile solo con la regola 14 da **a** e **b** (entrambi dati). L'elemento **m** è deducibile solo con la regola 8 da **u** (già dedotto). Il procedimento è [14,11,5,8,9].

ESERCIZIO 2

Si faccia riferimento alla GUIDA - OPS 2017, problema ricorrente MOVIMENTO DI UN ROBOT O DI UN PEZZO DEGLI SCACCHI.

PROBLEMA

In un campo di gara il robot è nella casella [17,17] con orientamento verso l'alto: trovare la lista L dei comandi da assegnare al robot per fargli compiere il percorso descritto dalla seguente lista di caselle:

[[17,17],[17,16],[17,17],[17,18],[18,18],[19,18],[18,18],[17,18],[17,19],[17,18],[17,17],[17,18]].

Inoltre, al termine del percorso, il robot deve essere orientato verso destra.

N.B. I comandi da usare sono i seguenti:

- f fa spostare il robot di una casella nella direzione in cui è orientato;
- o fa ruotare il robot in senso orario di 90 gradi;
- a fa ruotare il robot in senso antiorario di 90 gradi.

Per una rotazione di 180 gradi, si devono usare due rotazioni antiorarie.

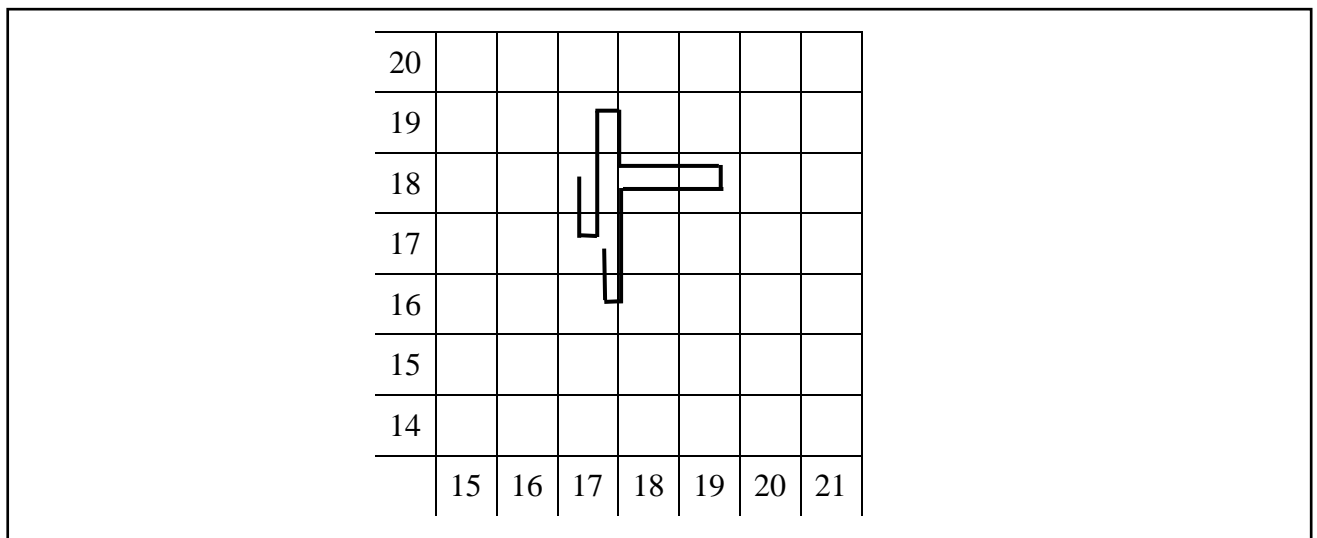
L [_____]

SOLUZIONE

L [a,a,f,a,a,f,f,o,f,f,a,a,f,f,o,f,a,a,f,f,a,a,f,o]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Si indichino con n, e, s, w gli orientamenti del robot rispettivamente verso l'alto (nord), verso destra (est), verso il basso (sud), verso sinistra (west), rispettivamente. In questo modo lo stato del robot può essere individuato da una lista di tre elementi: i primi due sono le coordinate della casella in cui è il robot, e il terzo è l'orientamento. Lo stato iniziale è, quindi [17,17,n]. Il problema si risolve facilmente disegnando prima il percorso che il robot deve seguire:



[[17,17],[17,16],[17,17],[17,18],[18,18],[19,18],[18,18],[17,18],[17,19],[17,18],[17,17],[17,18]]

Dal disegno (che mostra solo parzialmente il campo di gara, con i valori delle coordinate) è semplice determinare i comandi che fanno compiere tale percorso.

da stato	a stato	comando	caselle del percorso successive alla prima
[17,17,n]	[17,17,w]	a	
[17,17,w]	[17,17,s]	a	



[17,17,s]	[17,16,s]	f	[17,16]
[17,16,s]	[17,16,e]	a	
[17,16,e]	[17,16,n]	a	
[17,16,n]	[17,17,n]	f	[17,17]
[17,17,n]	[17,18,n]	f	[17,18]
[17,18,n]	[17,18,e]	o	
[17,18,e]	[18,18,e]	f	[18,18]
[18,18,e]	[19,18,e]	f	[19,18]
[19,18,e]	[19,18,n]	a	
[19,18,n]	[19,18,w]	a	
[19,18,w]	[18,18,w]	f	[18,18]
[18,18,w]	[17,18,w]	f	[17,18]
[17,18,w]	[17,18,n]	o	
[17,18,n]	[17,19,n]	f	[17,19]
[17,19,n]	[17,19,w]	a	
[17,19,w]	[17,19,s]	a	
[17,19,s]	[17,18,s]	f	[17,18]
[17,18,s]	[17,17,s]	f	[17,17]
[17,17,s]	[17,17,e]	a	
[17,17,e]	[17,17,n]	a	
[17,17,n]	[17,18,n]	f	[17,18]
[17,18,n]	[17,18,e]	o	

ESERCIZIO 3

Si faccia riferimento Guida OPS 2017, problema ricorrente GRAFI.

PROBLEMA

Un grafo, che si può immaginare come rete di strade (archi) che collegano delle città (nodi), è descritto dal seguente elenco di archi:

arco(n6,n1,4)	arco(n5,n6,2)	arco(n3,n4,2)
arco(n5,n2,2)	arco(n6,n2,4)	arco(n3,n5,5)
arco(n1,n4,3)	arco(n1,n3,4)	arco(n3,n6,3)

Disegnato il grafo, trovare:

1. la lista L1 del percorso semplice *più lungo* tra n1 e n2 e calcolarne la lunghezza K1;
2. la lista L2 del percorso semplice tra n1 e n2 *che ha lunghezza minima e che attraversi il maggior numero di archi (tra i percorsi di lunghezza minima)*, e calcolarne la lunghezza K2.
3. Il massimo valore K3 che risulta essere lunghezza di almeno due percorsi semplici tra n1 e n2
4. La lista L3 del percorso semplice tra n1 e n2 di lunghezza K3 che contiene l'arco che connette n3 con n5

Scrivere la soluzione nella seguente tabella.

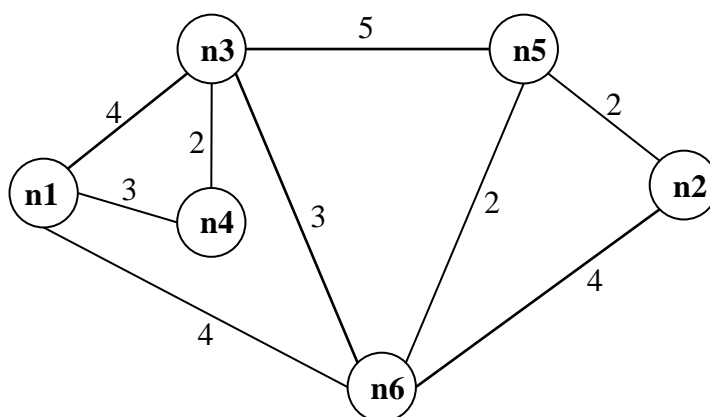
L1	[]
K1	
L2	[]
K2	
K3	
L3	[]

SOLUZIONE

L1	[n1,n4,n3,n5,n6,n2]
K1	16
L2	[n1,n6,n5,n2]
K2	8
K3	12
L3	[n1,n4,n3,n5,n2]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Per disegnare il grafo si osservi innanzitutto che sono menzionati 6 nodi (n1, n2, n3, n4, n5, n6); si procede per tentativi; si disegnano i 6 punti nel piano e li si collega con archi costituiti da segmenti: probabilmente al primo tentativo gli archi si incrociano; si cerca poi di risistemare i punti in modo da evitare gli incroci degli archi: spesso questo si può fare in più modi. Da ultimo si riportano le distanze sugli archi, come mostrato dalla figura seguente.



Si noti che le lunghezze degli archi che compaiono nei termini (che rappresentano delle strade) *non* sono (necessariamente) proporzionali a quelle degli archi del grafo (che sono, segmenti di retta). Per rispondere alle domande occorre elencare sistematicamente *tutti* i percorsi, che non passino più volte per uno stesso punto, tra n1 e n2:

PERCORSO da n1 a n2	LUNGHEZZA
[n1,n3,n5,n2]	$4+5+2=11$
[n1,n3,n5,n6,n2]	$4+5+2+4=15$
[n1,n3,n6,n2]	$4+3+4=11$
[n1,n3,n6,n5,n2]	$4+3+2+2=11$
[n1,n4,n3,n5,n2]	$3+2+5+2=12$
[n1,n4,n3,n5,n6,n2]	$3+2+5+2+4=16$
[n1,n4,n3,n6,n2]	$3+2+3+4=12$
[n1,n4,n3,n6,n5,n2]	$3+2+3+2+2=12$
[n1,n6,n2]	$4+4=8$
[n1,n6,n3,n5,n2]	$4+3+5+2=14$
[n1,n6,n5,n2]	$4+2+2=8$

L1, K1, L2, K2, L3, K3 seguono immediatamente.

ESERCIZIO 4

Si faccia riferimento Guida OPS 2017, problema ricorrente SOTTOSEQUENZE.

PROBLEMA

Considerate la sequenza descritta dalla seguente lista:

[41,73,100,67,125,58,83,78,108,101,74,42]

Trovare:

1. il numero K1 di sottosequenze strettamente decrescenti di lunghezza massima;
2. la lista L1 associata alla più lunga sottosequenza strettamente decrescente che non contiene 83;
3. il numero K2 di sottosequenze strettamente decrescenti di lunghezza massima che iniziano con un numero strettamente minore di 100;
4. la lista L2 che elenca i numeri che formano la più lunga sottosequenza strettamente decrescente che iniziano con un numero strettamente minore di 100 e hanno somma degli elementi *dispari*;

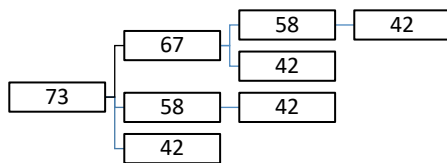
K1	
L1	[]
K2	
L2	[]

SOLUZIONE

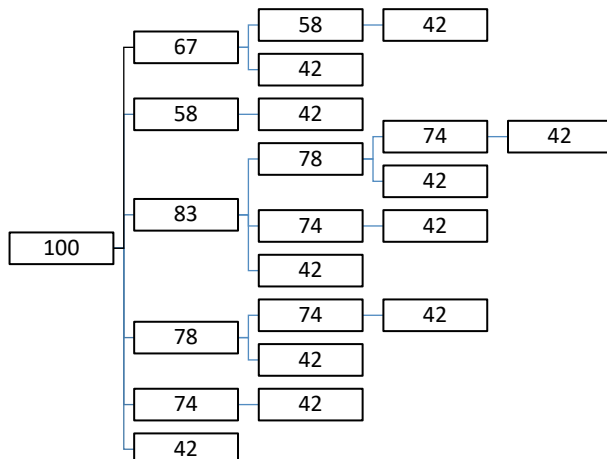
K1	3
L1	[125,108,101,74,42]
K2	2
L2	[83,78,74,42]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

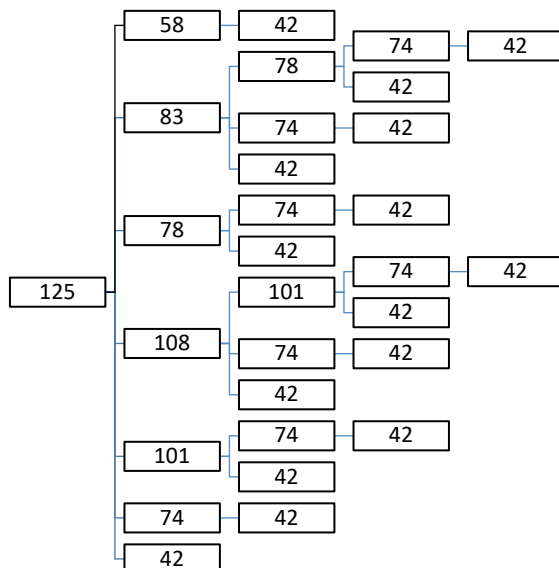
Occorre effettuare una ricerca esaustiva di tutte le sottosequenze decrescenti. Il primo elemento, 41, è anche il minimo della sequenza e quindi non dà luogo a sottosequenze di lunghezza maggiore di 1. Le sottosequenze che iniziano con 73 sono mostrate dallo schema seguente, che evidenzia che la più lunga è [73,67,58,42].



Le sottosequenze che iniziano con 100 sono mostrate dallo schema seguente, da cui si deduce che la sottosequenza più lunga con 100 come primo elemento è [100,83,78,74,42].



Poiché 67 compare in sottosequenze che partono da 100, nessuna sottosequenza che parte da esso può essere più lunga della più lunga sequenza che parte da 100. Le sottosequenze che iniziano da 125 formano lo schema seguente, da cui si deduce che ci sono 2 sottosequenze più lunghe con 125 come primo elemento, ovvero $[125,83,78,74,42]$ e $[125,108,101,74,42]$.



Dagli schemi è facile dedurre le risposte.

1. Vi sono 3 diverse sottosequenze di 5 elementi:
 $[100,83,78,74,42]$, $[125,83,78,74,42]$ e $[125,108,101,74,42]$.
2. Tra le 3 sottosequenze di 5 elementi, ce ne è una che non contiene 83: $[125,108,101,74,42]$.
3. Tutte le sottosequenze di 5 elementi iniziano con un numero non minore di 100; vi sono 2 diverse sottosequenze decrescenti di 4 elementi che iniziano con un numero minore di 100: $[73,67,58,42]$ e $[83,78,74,42]$.
4. Tra le sottosequenze decrescenti di 4 elementi che iniziano con un numero minore di 100, quella che ha la proprietà cercata è $[83,78,74,42]$.

ESERCIZIO 5

Si faccia riferimento alla GUIDA - OPS 2017, ELEMENTI DI PSEUDOLINGUAGGIO.

PROBLEMA

Si consideri la seguente procedura PROVA1 che è formalmente scorretta perché i simboli **X** e **Y** non sono definiti.

```

procedura PROVA1;
variables A, B, C, M, N integer;
input A, B, C;
M ← 2×X + 3×Z + 4×Y;
N ← 2×Z + 3×Y + 4×X;
output M, N;
endprocedura;
    
```

I valori di input per A, B e C sono rispettivamente 8, 4 e 11. Trovare, tra le variabili A, B, C dichiarate nella procedura, i tre nomi da sostituire a **X**, **Y** e **Z** per ottenere in output il valore 73 per la variabile M e 62 per la variabile N.

N.B. Sono da escludere i casi in cui una variabile (A, B o C) è sostituita a più di un simbolo (**X**, **Y** o **Z**)

X	
Y	
Z	

SOLUZIONE

X	B
Y	A
Z	C

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

È sufficiente costruire una tabella, come la seguente, che esamina le 6 possibilità.

X diventa A vale 8 Y diventa B vale 4 Z diventa C vale 11	X diventa A vale 8 Y diventa C vale 11 Z diventa B vale 4	X diventa B vale 4 Y diventa A vale 8 Z diventa C vale 11
M ← 2×8 + 3×11 + 4×4; 65	M ← 2×8 + 3×4 + 4×11; 72	M ← 2×4 + 3×11 + 4×8; 73
N ← 2×11 + 3×4 + 4×8; 66	N ← 2×4 + 3×11 + 4×8; 73	N ← 2×11 + 3×8 + 4×4; 62

X diventa B vale 4 Y diventa C vale 11 Z diventa A vale 8	X diventa C vale 11 Y diventa A vale 8 Z diventa B vale 4	X diventa C vale 11 Y diventa B vale 4 Z diventa A vale 8
M ← 2×4 + 3×8 + 4×11; 76	M ← 2×11 + 3×4 + 4×8; 66	M ← 2×11 + 3×8 + 4×4; 62
N ← 2×8 + 3×11 + 4×4; 65	N ← 2×4 + 3×8 + 4×11; 76	N ← 2×8 + 3×4 + 4×11; 72

ESERCIZIO 6

Si faccia riferimento alla GUIDA - OPS 2017, ELEMENTI DI PSEUDOLINGUAGGIO.

PROBLEMA

Si consideri la seguente procedura PROVA2 che è formalmente scorretta perché i simboli **X** e **Y** non sono definiti.

```

procedura PROVA2;
variables A, B, J integer;
A ← 2;
B ← 1;
for J from 1 to 3 step 1 do;
    A ← A + B + X + 2 × Y + J;
endfor;
output A;
endprocedura;
    
```

Trovare, tra tutte le variabili dichiarate nella procedura, i nomi da sostituire a **X** e **Y** per ottenere l’output maggiore per A.

N.B. Sono da escludere i casi in cui una variabile (A, B, J) è sostituita a più di un simbolo (**X** o **Y**)

X	
Y	

SOLUZIONE

X	J
Y	A

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Una maniera è di esaminare tutti i sei casi di sostituzione.

X diventa A Y diventa B vale 1	X diventa A Y diventa J	X diventa B vale 1 Y diventa A
A ← A + 1 + A + 2 × 1 + 1; 8	A ← A + 1 + A + 2 × 1 + 1; 8	A ← A + 1 + 1 + 2 × A + 1; 9
A ← A + 1 + A + 2 × 1 + 2; 21	A ← A + 1 + A + 2 × 2 + 2; 23	A ← A + 1 + 1 + 2 × A + 2; 31
A ← A + 1 + A + 2 × 1 + 3; 48	A ← A + 1 + A + 2 × 3 + 3; 56	A ← A + 1 + 1 + 2 × A + 3; 98

X diventa B vale 1 Y diventa J	X diventa J Y diventa A	X diventa J Y diventa B vale 1
A ← A + 1 + 1 + 2 × 1 + 1; 7	A ← A + 1 + 1 + 2 × A + 1; 9	A ← A + 1 + 1 + 2 × 1 + 1; 7
A ← A + 1 + 1 + 2 × 2 + 2; 15	A ← A + 1 + 2 + 2 × A + 2; 32	A ← A + 1 + 2 + 2 × 1 + 2; 14
A ← A + 1 + 1 + 2 × 3 + 3; 26	A ← A + 1 + 3 + 2 × A + 3; 103	A ← A + 1 + 3 + 2 × 1 + 3; 23

Una maniera più rapida è di osservare che ad ogni passo del ciclo il valore di A cresce, quindi conviene sostituire A al simbolo **Y** (e non a **X**, perché **Y** è moltiplicato per 2); a **X** conviene sostituire J (e non B) perché J è crescente.

ESERCIZIO 7

PROBLEM

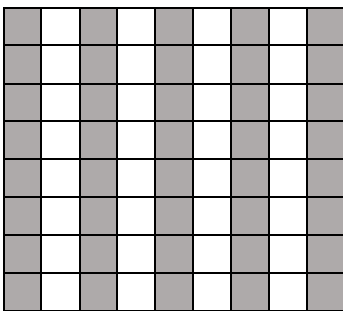
Consider an “augmented” chessboard of nine by eight squares (instead of the regular eight by eight chessboard). At the center of each square there is a ladybug. At a signal, each ladybug crawls straight along a diagonal to a square (chosen at random) that share only one vertex with the bug’s square. After this move, some squares hold more than one bug and some squares remain empty. What is the *least possible number* of empty squares? Put your answer, as an integer, in the box below.

Hint: in a regular chessboard, the squares are alternatively black and white along each row and each column; try a different way of coloring the chessboard.

SOLUTION

TIPS FOR THE SOLUTION

This problem is easily solved imagining the board colored in alternating grey and white strips, as the following diagram.



There are five vertical grey strips, that is 40 grey squares, and four vertical white strips, that is 32 white squares, 8 fewer than the grey ones. Because the ladybugs move diagonally one square, ladybugs moving on from grey squares will end up in white squares and vice versa. Thus at least 8 squares will remain empty.

It is easy to construct an example where exactly 8 squares remain empty: each ladybug moves to the next strip on the right, except for ladybugs on the rightmost strip that move to the left. Note that this is possible because the length of each vertical strip is even, so the ladybugs will move like in the following diagram.



ESERCIZIO 8

PROBLEM

Consider a normal 12-hour wall clock with the minute and hour hands. Let's state that a day begins at midnight: how many times do the minute and hour hands coincide, during the day? (Count midnight only once). Put your answer as an integer in the box below.

SOLUTION

22

TIPS FOR THE SOLUTION

The solution is easier attained by dividing the day in two parts of 12 hours, solving the problem for one part and then doubling the result.

The hour hand moves at a rate of $1/12$ of a revolution per hour, so after the first coincidence at 00:00, during the first hour the minute hand will not reach the hour hand; for each of the successive 11 hours the minute hand will meet the hour hand, but the last time at 12:00 does not count because this coincidence belongs to the second part of the day. In total $1 + 10 = 11$ coincidences. Therefore, in an entire day there are 22 coincidences.