ESERCIZIO 1

Si faccia riferimento all'Allegato A - OPS 2016, problema ricorrente REGOLE E DEDUZIONI, pagina 2.

PROBLEMA
Sono date le seguenti regole:

regola(1,[a,g],p)	regola(2,[g,q],r)	regola(3,[a,p],m)	regola(4,[b,g],q)
regola(5,[r,g,q],m)	regola(6,[f,r],q)	regola(7,[c],f)	regola(8,[f,c],r)
regola(9,[c,f,r],w)			

Trovare:

1. la lista L1 che descrive il procedimento per dedurre **m** conoscendo **a, g** ;
2. la lista L2 che descrive il procedimento per dedurre **m** conoscendo **b, g**;
3. la lista L3 che descrive il procedimento per dedurre **w** conoscendo **c**;

L1	[ ]
L2	[ ]
L3	[ ]

SOLUZIONE

L1	[1,3]
L2	[4,2,5]
L3	[7,8,9]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
Per la prima domanda, si osservi che **m** è deducibile con la regola 3 che ha come antecedenti **a** e **p** (il primo dato, il secondo incognito) e con la regola 5 che ha come antecedenti **r**, **g** e **q** (il primo e il terzo incogniti, il secondo dato). D'altra parte, a partire dai dati è possibile applicare solamente la regola 1, deducendo **p**; quindi si può usare la regola 3 per dedurre **m**. Il procedimento è quindi [1,3].

Per la seconda domanda, come prima, **m** è deducibile con la regola 3 che ha come antecedenti **a** e **p** (entrambi incogniti) e con la regola 5 che ha come antecedenti **r**, **g** e **q** (il primo e il terzo incogniti, il secondo dato). Poiché **a** non è dato e non è deducibile, la regola 3 è sicuramente non applicabile; stavolta a partire dai dati è applicabile soltanto la regola 4 che permette di dedurre **q**. Rimane solo da dedurre **r**, per ottenere il quale si applica la regola 2 (la regola 8, che pure permette di dedurre **r**, è inutilizzabile perché **c** non è noto e non è deducibile). Il procedimento è quindi [4,2,5].

Per la terza domanda, **w** è deducibile solo con la regola 9, che ha come antecedenti **c** (che è dato), **f** e **r** che sono incogniti. Conviene ancora cercare le regole applicabili a partire dai soli dati: in questo caso la regola 7, che permette di dedurre **f**; successivamente, noti **c** e **f**, con la regola 8 si deduce anche **r**. Il procedimento è quindi [7,8,9].

ESERCIZIO 2

Si faccia riferimento all'Allegato A - OPS 2016, problema ricorrente *KNAPSACK*, pagina 8.

PROBLEMA

In un deposito di minerali esistono esemplari di vario peso e valore individuati da sigle di riconoscimento. Ciascun minerale è descritto da un termine che contiene le seguenti informazioni:

minerale(<sigla del minerale>, <valore in euro>, <peso in Kg>).

Il deposito contiene i seguenti minerali:

minerale(m1,51,65) minerale(m2,36,54) minerale(m3,47,50)
minerale(m4,52,63) minerale(m5,45,61) minerale(m6,48,56)

Disponendo di un autocarro con portata massima di 115 Kg, trovare la lista L1 delle sigle di 2 minerali diversi trasportabili con questo autocarro che consente di trasportare il massimo valore possibile.

Disponendo di un autocarro con portata massima di 170 Kg, trovare la lista L2 delle sigle di 3 minerali diversi trasportabili con questo autocarro che consente di trasportare il massimo valore possibile.

N.B. Nelle liste, elencare le sigle in ordine crescente; per le sigle si ha il seguente ordine: m1<m2<… <m9.

L1	[ ]
L2	[ ]

SOLUZIONE

L1	[m3,m4]
L2	[m3,m4,m6]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

In generale, in problemi di questo tipo, si applica il *metodo della forza bruta*: considerare *tutte* le possibili *combinazioni* di due o tre minerali diversi, il loro valore e il loro peso.

N.B. Le *combinazioni* corrispondono ai sottoinsiemi: cioè sono indipendenti dall'ordine; per esempio la combinazione "m1, m4" è uguale alla combinazione "m4, m1". Quindi per elencarle tutte (una sola volta) conviene costruirle sotto forma di liste i cui elementi sono ordinati come richiesto dal problema.

Costruite le combinazioni, occorre individuare quelle trasportabili dagli autocarri e tra queste scegliere quelle di valore più alto.

Le combinazioni di due minerali, il valore, il peso e la trasportabilità sono le seguenti.

Combinazione	valore	peso	I autoc.
[m1,m2]	87	119	no
[m1,m3]	98	115	si
[m1,m4]	103	128	no
[m1,m5]	96	126	no
[m1,m6]	99	121	no
[m2,m3]	83	104	si
[m2,m4]	88	117	no
[m2,m5]	81	115	si
[m2,m6]	84	110	si

[m3,m4]	99	113	si
[m3,m5]	92	111	si
[m3,m6]	95	106	si
[m4,m5]	97	124	no
[m4,m6]	100	119	no
[m5,m6]	93	117	no

È immediato determinare L1.

Le combinazioni di tre minerali, il valore, il peso e la trasportabilità sono le seguenti.

Combinazione	valore	peso	II autoc.
[m1,m2,m3]	134	169	si
[m1,m2,m4]	139	182	no
[m1,m2,m5]	132	180	no
[m1,m2,m6]	135	175	no
[m1,m3,m4]	150	178	no
[m1,m3,m5]	143	176	no
[m1,m3,m6]	146	171	no
[m1,m4,m5]	148	189	no
[m1,m4,m6]	151	184	no
[m1,m5,m6]	144	182	no
[m2,m3,m4]	135	167	si
[m2,m3,m5]	128	165	si
[m2,m3,m6]	131	160	si
[m2,m4,m5]	133	178	no
[m2,m4,m6]	136	173	no
[m2,m5,m6]	129	171	no
[m3,m4,m5]	144	174	no
[m3,m4,m6]	147	169	si
[m3,m5,m6]	140	167	si
[m4,m5,m6]	145	180	no

È immediato determinare L2.

ESERCIZIO 3
Si faccia riferimento all'Allegato A - OPS 2016, problema ricorrente PERCORSI IN UN GRAFO, pagina 6.

PROBLEMA
È dato un grafo descritto dal seguente elenco di archi:

arco(n5,n2,7)	arco(n3,n2,9)	arco(n1,n2,1)
arco(n6,n5,2)	arco(n5,n3,3)	arco(n6,n2,3)
arco(n6,n1,5)	arco(n1,n4,4)	arco(n2,n4,6)

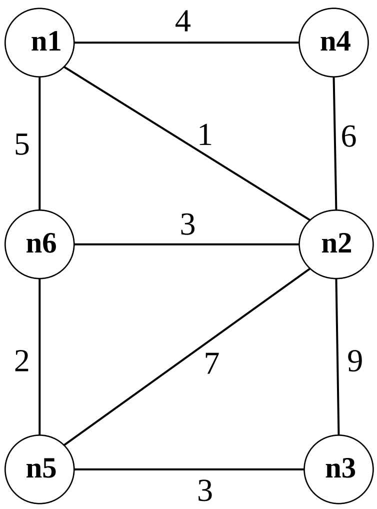
Disegnare il grafo e trovare:
1. la lista L1 del percorso più breve tra n1 e n3;
2. la lista L2 del percorso più lungo (senza passare più volte per uno stesso nodo) tra n1 e n3;
3. trovare il numero N di percorsi diversi da n1 a n3.

L1	[ ]
L2	[ ]
N	

SOLUZIONE

L1	[n1,n2,n6,n5,n3]
L2	[n1,n6,n5,n2,n3]
N	10

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
Un possibile *layout* del grafo è mostrato nella seguente figura.



N.B. Il grafo è planare, cioè è possibile disegnarlo su un piano senza che gli archi si incrocino. Le lunghezze associate agli archi (che, per esempio, rappresentano delle strade) non sono legate alle reali lunghezze dei segmenti che li rappresentano nel grafo.

I percorsi semplici tra n1 e n3 sono i 10 elencati di seguito.

PERCORSO	LUNGHEZZA
[n1,n2,n5,n3]	11
[n1,n2,n3]	10
[n1,n2,n6,n5,n3]	9

[n1,n4,n2,n5,n3]	20
[n1,n4,n2,n3]	19
[n1,n4,n2,n6,n5,n3]	18
[n1,n6,n5,n2,n3]	23
[n1,n6,n5,n3]	10
[n1,n6,n2,n5,n3]	18
[n1,n6,n2,n3]	17

N.B. Questi percorsi possono essere facilmente “organizzati” in un albero; la radice è il nodo di partenza, n1; ogni nodo dell’albero ha tanti figli quanti sono i nodi a lui adiacenti nel grafo, purché non compaiono già nell’albero come suoi antenati: per esempio i nodi figli della radice sono n2, n4 e n6; le foglie sono il nodo finale n3 o altri nodi che non hanno figli perché tutti i nodi adiacenti (nel grafo) compaiono già tra i loro antenati (nell’albero); i percorsi sono i “rami” che dalla radice dell’albero vanno alle foglie etichettate col nodo finale.

ESERCIZIO 4
Si faccia riferimento all'Allegato A - OPS 2016, ELEMENTI DI PSEUDOLINGUAGGIO, pagina 23.

PROBLEMA
Si consideri la seguente procedura PROVA1.

```
procedure PROVA1;
variables A, B, H, K integer;
A ← 100;
B ← 0;
K ← 0;
while B < A do
        H ← K + 1;
        A ← A − H;
        B ← B + H × K;
        K ← K + 1;
endwhile;
output K;
endprocedure;
```

Determinare il valore di output di K.

K	

SOLUZIONE

K	7

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
La seguente tabella mostra i valori assunti da K, A, B, H prima del ciclo "while" e dopo ogni esecuzione dello stesso; le ripetizioni si interrompono quando (il valore di) B supera (il valore di) A.

dopo	valori di			
	K	A	B	H
i primi 3 statement di assegnazione	0	100	0	indefinito
prima ripetizione del ciclo while	1	99	0	1
seconda ripetizione del ciclo while	2	97	2	2
terza ripetizione del ciclo while	3	94	8	3
quarta ripetizione del ciclo while	4	90	20	4
quinta ripetizione del ciclo while	5	85	40	5
sesta ripetizione del ciclo while	6	79	70	6
settima ripetizione del ciclo while	7	72	112	7

ESERCIZIO 5
Si faccia riferimento all'Allegato A - OPS 2016, ELEMENTI DI PSEUDOLINGUAGGIO, pagina 23.

PROBLEMA
Si consideri la seguente procedura PROVA2.

```
procedure PROVA2;
variables Q, M, J, K integer;
Q ← 0;
M ← 0;
K ← 1;
for J from 1 to 6 step 1 do
        K ← K × J;
        M ← M + J;
        Q ← Q + K + J;
 endfor;
output M, Q;
endprocedure;
```

Trovare i valori di output.

M	
Q	

SOLUZIONE

M	21
Q	894

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
È facile ricavare i valori richiesti schematizzando con una tabella il comportamento del programma.

dopo	valori di			
	J	K	M	Q
i primi due statement di assegnazione	indefinito	1	0	0
la prima ripetizione del ciclo for	1	1	1	2
la seconda ripetizione del ciclo for	2	2	3	6
la terza ripetizione del ciclo for	3	6	6	15
la quarta ripetizione del ciclo for	4	24	10	43
la quinta ripetizione del ciclo for	5	120	15	168
la sesta ripetizione del ciclo for	6	720	21	894

ESERCIZIO 6

PROBLEM

Numberland is a small country, where each car has a license plate with only numbers.
The font they use is the following:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

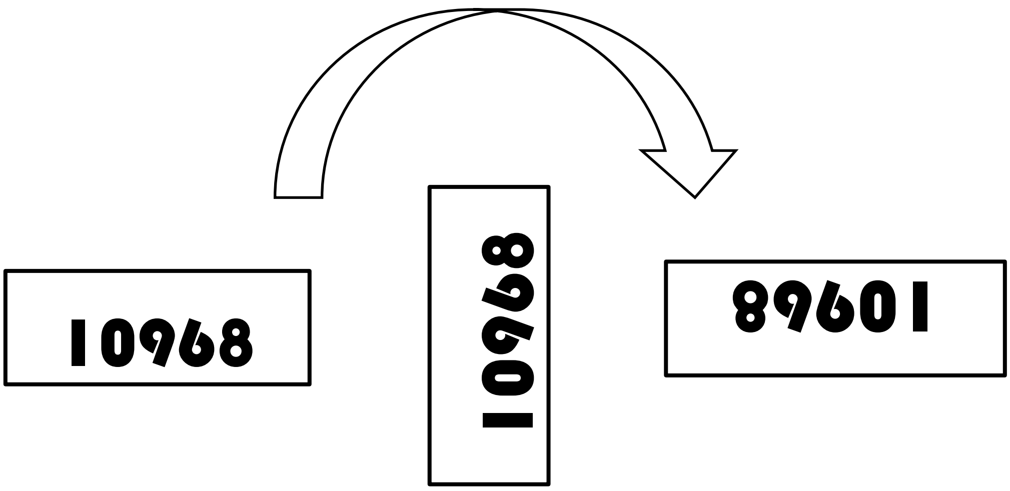
John bought a new car and was displeased to note that on his new plate all five figures were different so they were difficult to remember. Moreover, he inadvertently screwed the plate rotated on his car, so the digits were upside-down and in reverse order, with the result that he increased his registration number by 78633 until he noticed and corrected the error.
What was the (right) number on his license plate? Write the five-digit number in the box below.
Hint: consider the digits that remain digits when put upside-down.

SOLUTION

10968

TIPS FOR THE SOLUTION

If the plate showed a readable number upside-down (in fact rotated of 180 degrees in its plane), then all the digits on it were reversible. Only five of the digits used on plates in Numberland are reversible: 1, 6, 8, 9, 0. Since all five digits on the plate were different, they must be just these five. The problem then reduces to arrange these digits to make an integer that is 78633 less than its inversion. Through a little trial and error one will discover the number to be 10968. A point to stress is that 1, 8, 0 remain the same on inversion, but 6 and 9 exchange identities.
The process of rotating the plate is shown in the following picture.



ESERCIZIO 7

PROBLEM

Let's denote by "÷" the ordinary division (among rational numbers); we can insert brackets in the expression

$$1 \div 2 \div 3$$

so as to give it one of two values, viz.

either $(1 \div 2) \div 3 = \frac{1}{6}$

or $1 \div (2 \div 3) = \frac{3}{2}$.

By inserting brackets in different ways, how many different values can be given to the expression

$$1 \div 2 \div 3 \div 4 \div 5 \div 6 \text{ ?}$$

Put your answer, as an integer number, in the box below.

SOLUTION

16

TIPS FOR THE SOLUTION

Consider a general expression

$$a \div b \div c \div d \dots$$

It corresponds, by inserting brackets, to a rational number in which a is always at the numerator, b always at the denominator; the others (c, d etc.) can end at the numerator or at the denominator.

For example

$$\big((a \div b) \div c\big) \div d = \frac{a}{b \times c \times d} \,,$$

$$a \div \big((b \div c) \div d\big) = \frac{a \times c \times d}{b} \,.$$

Therefore, if there are n terms, there are 2^{n-2} resulting possible fractions (obtained arranging the $n-2$ terms in two sets, one of which can be empty: a string of "0" and "1" of length $n-2$ can describe each arrangement).

The next step is to find how many of these fractions have different value for the particular case

$$1 \div 2 \div 3 \div 4 \div 5 \div \dots \div n \,.$$

It easy to see that for n up to 7 all fractions are different. Hence, for $n = 6$, the number of different fractions is $2^{6-2} = 16$.

N.B. With numbers {3, 4, 5, 6, 7} all fractions are different because there are no two disjoint subsets of these numbers that have the same product; this is no more true for {3, 4, 5, 6, 7, 8}; indeed 3×8 = 6×4, so two different fractions have the same value:

$$\frac{3 \times 8 \times 5 \times 7}{4 \times 6} = \frac{4 \times 6 \times 5 \times 7}{3 \times 8}.$$

.